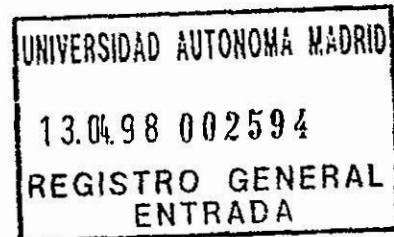


SC
C
1622
Mat



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.
FACULTAD DE CIENCIAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.



Geometría Conforme y Teoría de Funciones

Ana Granados Sanandrés

R.B.E. 67207

Tesis doctoral dirigida por D. José Luis Fernández Pérez.

Madrid, Abril de 1998.

A mi familia

Quiero expresar mi agradecimiento a aquellas personas que han hecho posible que esta tesis haya visto la luz. En primer lugar a quien considero mi maestro, Josechu, por haberme dado la oportunidad de trabajar junto a él y de disfrutar tanto aprendiendo de él. Quiero agradecerle todo el tiempo, entrega y comprensión que me ha dedicado, y la sensibilidad, respeto y cariño con los que me ha tratado haciendo que estos 5 años hayan sido muy especiales para mí. Durante este tiempo se ha preocupado de darme la mejor formación, y no sólo matemática, para enfrentarme ahora a la siguiente etapa. Por último, gracias por las “sesiones de psicoanálisis”.

A mi *alter ego* Alicia. Me he divertido mucho con ella discutiendo sobre curvatura, sobre martingalas, y sobre la vida. Sin ella no habría disfrutado tanto de este doctorado. A mi otro compañero de despacho, Raúl, quien tan pacientemente soportó estas discusiones, y a Pablo, que también las sufrió durante un tiempo.

A Dani, por haber conversado conmigo tanto de curvas y curvaturas, por el amor con el que me ha apoyado, y por el cuidado con el que se ha leído este trabajo en busca de palabras mal acentuadas y deficiencias de estilo.

A Conchi, Maco, Maite y Carolina, por sus ánimos.

A mis “hermanos” José Manuel, Domingo, Jose y Mavi por la colaboración que en todo momento he encontrado en ellos. Me considero afortunada por haber podido hablar de matemáticas con ellos, especialmente con Jose, siempre dispuesto a escuchar, y con Mavi, con quien he tenido la suerte de trabajar un poco ultimamente.

A Mavi, una vez más, por su excelente trabajo como lectora y por sus atinadas sugerencias.

A los demás compañeros, en especial a Fernando, Paul, Ernesto y Blanca. Me lo he pasado bien todos estos años estudiando matemáticas y dando clases, pero también conociéndolos a todos, bailando las Grecas, o tomando unas cervezas.

Índice General

Notaciones	v
Introducción	vii
I Curvatura hiperbólica y aplicaciones conformes	1
1 Nociones básicas	7
1.1 Dominios planos hiperbólicos.	7
1.1.1 Curvatura hiperbólica de un segmento	8
1.1.2 Caso convexo	9
1.1.3 Trigonometría hiperbólica	10
1.1.4 Curvatura	13
1.1.5 Regiones especiales del disco: paraguas	15
1.2 Teorema de Schur, un resultado euclídeo	20
1.2.1 Una prueba del Teorema de Schur	24
2 Geometría conforme y curvatura hiperbólica	33
2.1 Problema de Hayman y Wu	34
2.2 La Constante de Hayman-Wu para dominios convexos.	42
2.2.1 El Teorema de Hayman-Wu, un resultado de geometría hiperbólica	42
2.3 Teorema de Estiramiento de Curvas (TEC)	45
2.3.1 Prueba del Teorema 3	47
2.4 Prueba del Teorema de Estiramiento de Curvas	49
2.4.1 Versión poligonal del TEC	49
2.4.2 Prueba del TEC	60
2.5 Un resultado de comparación para cuñas curvadas	63
II Integrales sobre contornos	69
3 Nociones básicas	75

3.1	Núcleo de Poisson	75
3.2	Ángulo total	77
3.3	Notación	82
3.4	Un funcional asociado al dominio Ω	83
3.5	Dos argumentos de simetría del núcleo de Poisson en dominios convexos	88
3.6	Curvatura exterior de una curva	93
4	El Problema de Gabriel	95
4.1	Funciones subarmónicas	96
4.1.1	La constante óptima	97
4.1.2	Un caso especial: γ es un círculo	101
4.2	Funciones holomorfas	103
4.2.1	La constante exacta	104
4.2.2	El contraejemplo a la conjetura de Gabriel	106
5	Aplicaciones conformes: el problema de Hayman-Wu	109
5.1	γ es una línea recta	112
5.2	Aplicaciones conformes y dominios que no pueden ser pinchados	113
5.3	Un Teorema de Hayman-Wu con el ángulo total	117
5.4	Paso a funciones holomorfas	121
	Bibliografía	125

Notaciones

A lo largo de la memoria los teoremas originales se enumeran desde el 1 hasta el 12. Otros teoremas se denotan por la inicial del apellido de su autor o autores. Los lemas utilizados en la demostración de los teoremas se enumeran del 1 al 16. Algunas ecuaciones aparecen sin número de referencia; en aquéllas que queremos destacar, bien por su importancia, bien porque vayamos a usarlas después, aparecen dos números: el primero indica el capítulo y el segundo el orden dentro del mismo. Por ejemplo, la ecuación (2.3) es la tercera dentro del segundo capítulo.

Como es habitual, C , $C(\alpha, \beta)$, o K designarán constantes que dependen de los argumentos mostrados y que pueden variar de línea en línea, o incluso dentro de la misma, a pesar de seguir denotándose igual.

La lista que sigue incluye las notaciones y símbolos que aparecen más frecuentemente a lo largo de la memoria:

\mathbb{D} Disco unidad del plano complejo: $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

$\partial\mathbb{D}$ Circunferencia unidad: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

\mathbb{H} Semiplano superior: $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$

\mathbb{R} Recta real: $\{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0\}$

\mathbb{D}^+ Disco unidad positivo: $\{z \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}\}$

Ω Dominio plano simplemente conexo

$\partial\Omega$ Frontera de Ω

$\lambda_\Omega(z)$ Densidad hiperbólica del dominio Ω en el punto z

$d_\Omega(a, b)$ Distancia hiperbólica entre los puntos a y b en Ω

$d_e(a, b)$ Distancia euclídea entre a y b : $|b - a|$

$k_h(z, \gamma)$ Curvatura hiperbólica de la curva γ en z (ver p. 8)

α Ángulo entre curvas (ver p. 10)
 T Triángulo geodésico (ver p. 11)
 $H_{p,q}$ Par de horociclos en el disco que pasan por los puntos p y q (ver p. 16)
 $U(p, q)$ Paraguas en el disco cuya frontera son horociclos (ver p. 16)
 $H_{p,q}^b$ Par de curvas de curvatura constante b en el disco que pasan por los puntos p y q (ver p. 17)
 $U(p, q; b)$ Paraguas en el disco cuya frontera son curvas de curvatura constante b , $|b| < 1$ (ver p. 17)
 $U(p, q; b, m)$ Paraguas en el disco cuya frontera son curvas de curvatura constante b , $|b| > 1$ (ver p. 18)
 $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ Curva poligonal de lados de longitud (euclídea o hiperbólica, según el caso) L y de ángulos θ_k (ver p. 24 y 49)
 Λ Longitud euclídea
 $\lambda_\Omega(s)|ds|$ Elemento de arco hiperbólico (ver p. 37)
 $w(z, I, \Omega)$ Medida armónica del arco I desde z en el dominio Ω (ver p. 39)
 $P_z^\Omega(w)$ Núcleo de Poisson del dominio Ω con $w \in \partial\Omega$ y $z \in \Omega$ (ver p. 76)
 $V_\gamma(z)$ Ángulo total abarcado por γ en z (ver p. 77)
 P, Q Núcleos de Poisson de ciertos semiplanos (ver p. 82)
 k_Γ^λ Funcional asociado al dominio Ω (ver p. 83)
 $g_\Omega(z, a)$ Función de Green del dominio Ω con polo en a (ver p. 85)
 k_p^{ext} Curvatura exterior (ver p. 93)

Introducción

El análisis complejo está estrechamente relacionado con la geometría hiperbólica y con la teoría del potencial. En esta memoria explotamos ambas relaciones.

La conexión entre análisis complejo y geometría hiperbólica fue establecida por primera vez en 1882 por Henri Poincaré, cuando descubrió que el grupo de isometrías del disco con el modelo hiperbólico conforme (hoy conocido como métrica de Poincaré) se corresponde con el grupo de transformaciones de Möbius.

El punto de vista geométrico moderno en variable compleja comenzó en 1938 con un trabajo de Lars V. Ahlfors en el que se probaba que el lema de Schwarz se puede interpretar como una desigualdad entre curvaturas en el sentido de que la métrica extremal en dominios planos con curvatura negativa es la de Poincaré.

En la primera parte de la memoria estudiamos el problema de Hayman-Wu que consiste en estimar la longitud de las curvas de nivel de aplicaciones conformes. La conexión entre variable compleja y geometría hiperbólica nos permitirá encontrar la cota óptima para éste en dominios convexos, y también entenderlo en contextos más generales.

Para más detalles al respecto referimos al lector a la introducción de la Parte I, página 3, donde enunciamos los resultados obtenidos y comentamos brevemente las ideas involucradas en las pruebas.

La relación entre variable compleja y la teoría del potencial nace del hecho de que las aplicaciones conformes son los homeomorfismos que conservan las soluciones del problema de Laplace.

En la segunda parte de esta memoria usaremos técnicas de teoría del potencial real para resolver el problema de Gabriel, el cual establece comparaciones entre integrales con peso (geométrico) sobre curvas.

Con estas técnicas encontramos la expresión para la mejor constante de comparación y probamos que cierta conjetura de Gabriel no es cierta.

Para finalizar la memoria consideraremos de nuevo el problema de Hayman-Wu pero en este contexto más general en el que admitimos un peso geométrico y, también usando técnicas de teoría del potencial, mostramos que no siempre tiene solución y damos una condición necesaria para que la tenga.

En la introducción a esta segunda parte, página 71, se describen los resultados obtenidos y las ideas de sus pruebas.

Una parte de los resultados nuevos que aparecen en esta tesis están contenidos en los artículos:

[FG] Fernández, J.L., Granados, A. **On geodesic curvature and conformal mapping.** *San Petersburg Mathematical Journal*, Vol. 9 (Goluzin's Volume), (1998), issue 3.

[G] Granados, A. **On a problem raised by Beurling and Gabriel.** *Enviado para su publicación.*

Parte I

Curvatura hiperbólica y aplicaciones conformes

Existe una conocida y estrecha relación entre la geometría hiperbólica y el análisis complejo que se sigue básicamente del hecho de que el grupo de automorfismos del disco unidad \mathbb{D} (entendido como superficie riemanniana) coincide con el grupo de isometrías que conservan el sentido (con respecto a la métrica de Poincaré $\lambda_{\mathbb{D}}(s)$) del disco \mathbb{D} . Esta conexión resulta ser muy fructífera.

En esta parte de la memoria explotaremos esta conexión y notaremos que el bello teorema de Hayman y Wu sobre funciones conformes es un resultado de geometría hiperbólica; de hecho, éste se reduce a estimar superiormente el funcional

$$I(\mathbb{D}, \gamma) := \int_{\gamma} e^{-d_{\mathbb{D}}(0, s)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) ds$$

sobre curvas γ de curvatura hiperbólica acotada superiormente.

También mostraremos la relación existente entre un teorema clásico de geometría debido a Schur y este Teorema de Hayman-Wu en el disco.

En particular, los resultados que se obtienen serán válidos en el caso en el que la curva γ tenga curvatura hiperbólica acotada superiormente en valor absoluto por 1.

El método utilizado para obtener nuestros resultados consiste en determinar la situación extremal para el funcional $I(\mathbb{D}, \gamma)$ para γ y estimarlo en este caso.

La razón heurística por la que es de esperar que tal situación extremal exista es la siguiente: si un arco contenido en el disco se “dobla” (es decir, si su curvatura aumenta) la distancia entre sus extremos disminuye (en el plano euclídeo este hecho es cierto y fue probado por Schur).

Obsérvese que un teorema sobre cotas de $I(\mathbb{D}, \gamma)$ se traduce en un resultado sobre la velocidad con la que la curva γ se aproxima a la frontera de \mathbb{D} .

Pasamos ahora a dar una descripción pormenorizada de los principales resultados de esta parte de la memoria. Para nomenclatura, definiciones básicas y resultados generales referimos al lector al capítulo 1.

En el capítulo 2 probaremos el resultado principal de esta parte de la memoria, Teorema 3, en el que establecemos una cota para el funcional $I(\mathbb{D}, \gamma)$ cuando la curvatura de γ está acotada por 1. De forma precisa:

Teorema 3 *Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ una curva en \mathbb{D} y asúmase que el valor absoluto de la curvatura hiperbólica de γ está superiormente acotado por 1. Entonces,*

$$\int_{\gamma} e^{-d_{\mathbb{D}}(p,s)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) ds < \pi$$

La cota es óptima (obsérvese que la desigualdad es estricta).

La prueba de este teorema ilustra la técnica de “localización” que permite dar las posiciones relativas de puntos sobre distintas curvas en función de las curvaturas de las mismas. Esta técnica explica de forma sencilla el teorema clásico de geometría de Schur.

Una idea de cómo probar este resultado es la siguiente: comprobaremos que cuando aumentamos la curvatura de la curva γ , la distancia a un punto fijo, p , disminuye; es decir, el funcional $I(\mathbb{D}, \gamma)$ será máximo cuando γ tenga curvatura 1, y por tanto bastará calcularlo en este caso. Más concretamente, el Teorema 3 resulta ser una consecuencia de:

Teorema 5 (Teorema de Estiramiento de Curvas) *Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ una curva parametrizada por longitud de arco y supóngase que el valor absoluto de su curvatura está superiormente acotado por una constante fija b . Si $b > 1$ asúmase además que su longitud hiperbólica es menor que $\frac{\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}$ (ver §2.1.4). Entonces,*

$$d_{\mathbb{D}}(0, \gamma(s)) \geq C(s, b, d),$$

donde la cota $C(s, b, d)$ se alcanza sobre una curva H_b de curvatura hiperbólica constante b .

De forma más precisa, si $b = 1$ y z_0 es el punto en γ que está más cerca de 0, y $d = d_{\mathbb{D}}(0, z_0)$, entonces

$$d_{\mathbb{D}}(0, \gamma(s)) \geq d_{\mathbb{D}}(0, H(s)) \left(= \log \frac{1 + c(s)}{1 - c(s)} \right)$$

Aquí H es el horociclo en \mathbb{D} , tangente a γ en z_0 , con $H(0) = z_0$ que rodea

$$\text{al } 0, \text{ y } c(s) = \sqrt{1 - \frac{4e^d}{s^2 + (e^d + 1)^2}}$$

El Teorema 5 es una versión hiperbólica de un Teorema de Schur. La prueba clásica de éste no funciona en el caso hiperbólico, sin embargo, la que damos para el caso hiperbólico sí que funciona en el caso euclídeo (como veremos en el capítulo 1).

Los teoremas enunciados hasta ahora surgieron al considerar la pregunta formulada por Øyma acerca de la constante óptima para el Teorema de Hayman-Wu en dominios convexos. El siguiente resultado, consecuencia inmediata del Teorema 3, responde a esta cuestión,

Teorema 4 *Sea Ω un dominio convexo en \mathbb{C} diferente del propio plano, sea L una línea recta y sea f una función conforme cualquiera de Ω sobre \mathbb{D} , entonces:*

$$\Lambda(f(\Omega \cap L)) < 2\pi$$

La cota es óptima.

Aquí Λ denota la longitud euclídea.

Capítulo 1

Nociones básicas

Este capítulo reúne sólo las herramientas, nociones y hechos básicos que se utilizan para los resultados de esta parte de la memoria. La estructura es la siguiente:

1.1 Dominios planos hiperbólicos.

1.1.1 Curvatura hiperbólica de un segmento.

1.1.2 Caso convexo.

1.1.3 Trigonometría hiperbólica.

1.1.4 Curvatura.

1.1.5 Regiones especiales del disco: paraguas.

1.2 Teorema de Schur, un resultado euclídeo.

1.2.1 Una prueba del Teorema de Schur.

1.1 Dominios planos hiperbólicos.

En esta memoria será fundamental estudiar la convergencia de la integral $\int_{\gamma} e^{-d_D(0,s)} \lambda_D(s) ds$ en función de la curvatura hiperbólica de la curva γ . Por esto dedicamos esta sección a exponer algunas nociones básicas y resultados conocidos sobre curvatura hiperbólica.

1.1.1 Curvatura hiperbólica de un segmento

• La distancia hiperbólica del dominio Ω es denotada por d_Ω , y la densidad hiperbólica de la métrica por λ_Ω . Recordamos que si el dominio es el disco hiperbólico, para $a, b \in \mathbb{D}$ tenemos

$$d_{\mathbb{D}}(a, b) = \log \frac{|1 - a\bar{b}| + |a - b|}{|1 - a\bar{b}| - |a - b|}.$$

En el caso frecuente en el que el dominio sea el disco hiperbólico, esto es, $\Omega = \mathbb{D}$, y cuando sea conveniente para simplificar la notación, denotamos la distancia $d_{\mathbb{D}}$ simplemente por d . Recordamos también que si $a, b \in \mathbb{H}$ entonces

$$d(a, b) = d_{\mathbb{H}}(a, b) = \log \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|}.$$

• Dada una curva γ en Ω denotamos su curvatura con respecto a la métrica hiperbólica en un punto $z \in \gamma$ como $K_h(z, \gamma)$; de igual forma denotamos la curvatura euclídea en $z \in \gamma$ como $K_e(z, \gamma)$. Ambas curvaturas están relacionadas mediante la conocida fórmula (véase, por ejemplo, [BO]):

$$K_e(z, L) = \lambda_\Omega(z)K_h(z, L) + \nabla \log \lambda_\Omega(z)\mathbf{n},$$

donde \mathbf{n} es el vector euclídeo unitario normal rotado $+\frac{\pi}{2}$ con respecto al vector tangente a la curva (la curvatura depende del sentido de recorrido, pero al elegir así \mathbf{n} , esto queda especificado).

• Dado cualquier dominio simplemente conexo Ω que no sea el plano, y dado un segmento L que esté contenido en Ω ,

$$|K_h(z, L)| \leq 2.$$

Esto se sigue de lo siguiente:

si denotamos por g una aplicación conforme del disco unidad \mathbb{D} sobre el dominio Ω , el Teorema 1/4 de Koebe nos da

$$\left| \frac{g''(0)}{g'(0)} \right| \leq 4. \quad (1.1)$$

Debido a que la aplicación g es conforme, las densidades hiperbólicas del disco y de Ω están relacionadas mediante

$$\lambda_\Omega(g(z))|g'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Por comodidad denotamos $w = g(z)$. Tomando logaritmos en la expresión anterior y diferenciando después con respecto a z ,

$$\partial_w (\log \lambda_\Omega)(w) g'(z) + \frac{1}{2} \frac{g''(z)}{g'(z)} = \partial_z (\log \lambda_{\mathbb{D}}(z)), \quad (1.2)$$

donde $\partial_z = \frac{\partial_x - i\partial_y}{2}$. Recordamos las fórmulas

$$(a) (\log \lambda_{\mathbb{D}}(z))_z = \frac{\bar{z}}{1 - |z|^2}$$

$$(b) |\nabla \log \lambda_\Omega| = 2 |(\log \lambda_\Omega)_w|$$

que nos permiten simplificar la última expresión (1.2) a

$$\frac{1}{2} |\nabla \log \lambda_\Omega(w)| |g'(z)| = \left| -\frac{1}{2} \frac{g''(z)}{g'(z)} + \frac{\bar{z}}{2} \lambda_{\mathbb{D}}(z) \right|.$$

Finalmente, evaluando en z y usando la desigualdad (1.1)

$$|\nabla \log \lambda_\Omega(w)| \leq 2 \lambda_\Omega(w).$$

(Para más detalle, véase [O].)

Usando esta relación y el hecho de que la curvatura euclídea del segmento L es cero, obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} |K_h(z, L)| &= \left| \frac{K_e(z, L) - \nabla \log \lambda_\Omega(z) \mathbf{n}}{\lambda_\Omega(z)} \right| \\ &\leq \frac{|\nabla \log \lambda_\Omega(z)|}{|\lambda_\Omega(z)|} \leq 2, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n} es el vector euclídeo unitario normal (rotado $+\frac{\pi}{2}$ con respecto al vector tangente a la curva).

1.1.2 Caso convexo

Si Ω es convexo y L es un segmento, entonces

$$|K_h(z, L)| \leq 1.$$

Para esto recordamos que, con la notación de arriba, $\left| \frac{g''(0)}{g'(0)} \right| \leq 2$,

(véase [Hi, pág. 358]). La igualdad sólo se alcanza si Ω es el semiplano superior y L es una línea horizontal, y en rotaciones de esta configuración.

La invarianza conforme de la curvatura hiperbólica es un hecho muy conveniente en teoría de funciones, véase [A1], [M].

1.1.3 Trigonometría hiperbólica

En 2.4.1, (página 49) usaremos algunos conceptos de geometría hiperbólica que procedemos a describir ahora junto con alguna notación conveniente:

Dados dos vectores cualesquiera v y w en el espacio tangente $T_p \mathbb{D}$, definimos el *ángulo* α entre v y w como el ángulo barrido (en sentido positivo) desde v hasta w , módulo 2π y entre $-\pi$ y π . Lo denotaremos por

$$\alpha = \angle(v, w) \in [-\pi, \pi).$$

Obsérvese que $\angle(v, w) + \angle(w, v) = 0$.

Para simplificar la notación, cuando $\alpha \in [0, \pi)$ escribimos $\alpha \geq 0$, y de la misma manera, si $\alpha \in [-\pi, 0)$ escribimos $\alpha < 0$.

Hablamos de segmentos geodésicos para referirnos a un subconjunto conexo de una geodésica y los denotamos por γ_k ; cuando sea necesario especificar sus extremos denotaremos por $[p, q]$ al segmento geodésico que empieza en el punto p y termina en q , y por $d_{p,q}$ la longitud de dicho segmento, es decir, $d_{p,q} = d_{\mathbb{D}}(p, q)$.

Por comodidad abusamos de la notación y escribimos $\angle \{[p, q], [q, r]\}$ para denotar el ángulo α en el punto q entre la prolongación de la geodésica de p a q y la geodésica de q a r . Dicho de forma más precisa:

Si γ es la geodésica en \mathbb{D} que pasa por p y q , y si η es la geodésica que pasa por q y r con $\gamma(0) = \eta(0) = q$, entonces

$$\alpha = \angle(\gamma'(0), \eta'(0)).$$

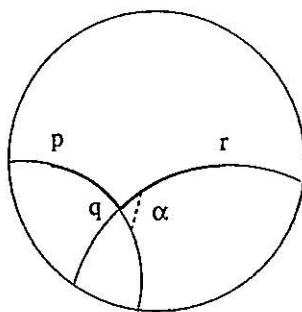


Figura 1

Notamos que si, por ejemplo, p, q y r son tres puntos consecutivos en una geodésica entonces $\angle([p, q], [q, r]) = 0$.

Un *triángulo geodésico* T en \mathbb{D} es un conjunto de tres segmentos geodésicos llamados *lados*, a los que, para simplificar notación en lo que sigue en esta explicación, denotamos por $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, parametrizados por longitud de arco de forma que si sus longitudes respectivas son $L[\gamma_i] = l_i$, $i = 1, 2, 3$, entonces

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(0) = \gamma_3(l_3) & \gamma_1(l_1) = \gamma_2(0) & \gamma_2(l_2) = \gamma_3(0) \\ l_1 + l_2 \geq l_3 & l_2 + l_3 \geq l_1 & l_3 + l_1 \geq l_2 \end{array}$$

Los *ángulos* de T son los ángulos “interiores” dados por

$$a_i = \angle(\gamma'_{i+1}(0), -\gamma'_i(l_i)),$$

donde el signo negativo aparece porque estamos cambiando el sentido de recorrido de la curva γ_i ; es decir, estamos hallando el ángulo en el punto $\gamma_{i+1}(0) = \gamma_i(l_i)$ entre las geodésicas γ_{i+1} y la geodésica que empieza en el punto $\gamma_i(l_i)$ y que termina en el punto $\gamma_i(0)$. (Véase la Figura 2.). Observamos que los ángulos de un triángulo están **siempre** comprendidos entre 0 y π . (Es decir, son siempre **positivos**.)

Nos referimos a un triángulo bien dando sus lados o bien dando sus vértices.

Por una *cuña* significamos dos segmentos geodésicos γ_1, γ_2 en \mathbb{D} de longitudes $L[\gamma_1] = l_1$ y $L[\gamma_2] = l_2$ respectivamente tales que $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$, y un ángulo “interno” $a = \angle(\gamma'_2(0), -(\gamma_1)'(l_1))$. (Véase la Figura 3.)

Nos referimos a una *cuña* dando sus lados y el ángulo.

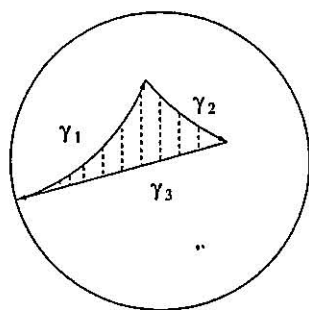


Figura 2

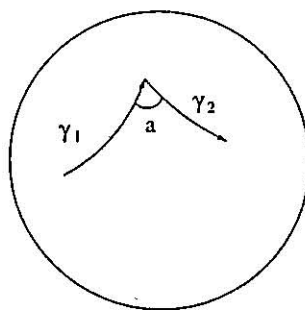


Figura 3

Para hacer más clara la lectura, usamos letras griegas cuando hablamos de ángulos entre curvas y letras latinas cuando nos referimos a ángulos internos.

Para terminar recordamos las *leyes del seno y el coseno para triángulos geodésicos en \mathbb{D}* . Sea

$$\gamma_1 : [0, A] \rightarrow \mathbb{D}, \quad \gamma_2 : [0, B] \rightarrow \mathbb{D}, \quad \gamma_3 : [0, C] \rightarrow \mathbb{D}$$

con

$$\gamma_1(A) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(B) = \gamma_3(0), \quad \gamma_3(C) = \gamma_1(0)$$

los tres lados, parametrizados por longitud de arco, de un triángulo en \mathbb{D} , y sean a, b, c los ángulos internos opuestos, es decir:

$$a = \angle(\gamma_3'(0), -\gamma_2'(B)) \quad b = \angle(\gamma_1'(0), -\gamma_3'(C)) \quad c = \angle(\gamma_2'(0), -\gamma_1'(A))$$

La regla del seno establece las relaciones

$$\frac{\sinh A}{\sin a} = \frac{\sinh B}{\sin b} = \frac{\sinh C}{\sin c},$$

y la regla del coseno es la identidad

$$\cosh C = \cosh A \cos B - \sinh A \sinh B \cos c$$

Con estas reglas es fácil ver, por ejemplo, que el ángulo de los triángulos equiláteros en \mathbb{D} puede ir desde 0 (vértices en la frontera de \mathbb{D}) hasta $\frac{\pi}{3}$ (cuando la longitud del lado tiende a 0), ya que si $A = B = C$, entonces tenemos que

$$\cos c = \frac{\cosh^2 A - \cosh A}{\sinh A};$$

y por tanto

$$\cos c \rightarrow 1 \text{ si } A \rightarrow \infty$$

y

$$\cos c \rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ si } A \rightarrow 0$$

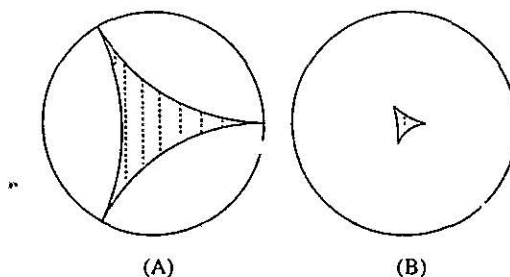


Figura 4

1.1.4 Curvatura

Consideremos el semiplano superior \mathbb{H} . Vamos a ver que una semirecta R en \mathbb{H} que forma un ángulo $\theta \in (0, \pi)$ con el eje real, y recorrida desde el origen, tiene curvatura hiperbólica constante $K_h(z, R) = \cos \theta$ en todos sus puntos; para esto recordamos la relación entre las curvaturas euclídea e hiperbólica dada en §1.1.1 y que en \mathbb{H} la densidad $\lambda(z) = \frac{1}{\Im z}$. Entonces

$$\begin{aligned} K_h(z, R) &= (\Im z) (K_e(z, R) - \nabla \log \lambda(z) \cdot n) \\ &= (\Im z) \left(0 - \left(0, \frac{-\Im z}{(\Im z)^2} \right) * (-\sin \theta, \cos \theta) \right) \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

donde $(a, b) * (c, d)$ denota el producto escalar.

En el caso particular en el que la recta R es paralela al eje real, se comprueba de esta misma manera que $K_h(z, R) = \pm 1$ (el signo depende del sentido de recorrido).

Ahora bien, los autómorfsismos del semiplano, que son las transformaciones de Möbius, coinciden con las isometrías de la métrica hiperbólica en \mathbb{H} que preservan el sentido y, por lo tanto, las curvas de curvatura hiperbólica constante $\cos \theta$ son las imágenes mediante las transformaciones de Möbius de estas rectas R .

Como la familia de círculos y rectas es invariante bajo las transformaciones de Möbius, las curvas de curvatura constante $\cos \theta$ de \mathbb{H} son los arcos de círculo euclídeo y las semirrectas que forman ángulo θ con el eje real. De todo esto se sigue que (véase la Figura 5):

- las curvas γ en el disco \mathbb{D} con curvatura constante b , con $|b| < 1$, $b = \cos \theta$, son arcos de círculos euclídeos que intersecan el círculo unidad con ángulo θ .
- las curvas γ con curvatura constante $+1$ ó -1 son círculos tangentes a la frontera del disco y se llaman *horociclos*. Serán de suma importancia en esta parte de la memoria.
- Si $|b| > 1$, entonces un razonamiento como el anterior prueba que γ es un círculo hiperbólico de radio hiperbólico r , donde $b = \coth r$.

(Ver, por ejemplo [BO]); (la clase de círculos hiperbólicos en \mathbb{D} coincide con la clase de círculos euclídeos en \mathbb{D} .)

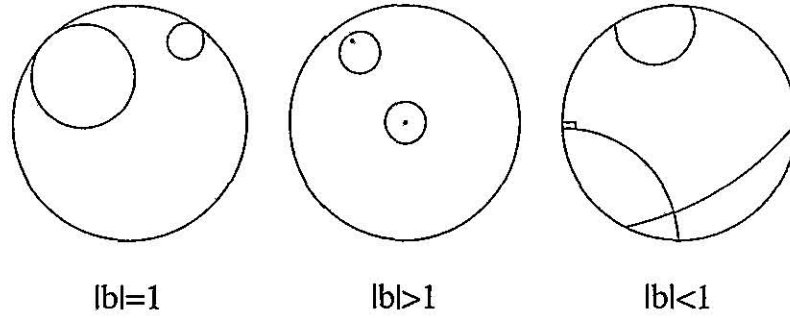


Figura 5

Dados un punto p en \mathbb{D} y una dirección fija, hay dos curvas tangentes a dicha dirección en p cuyas curvaturas (hiperbólicas) en valor absoluto son iguales a b . De hecho, una de ellas tiene curvatura b y la otra $-b$. Recuérdese que si $b = 1$ entonces éstas se llaman horociclos.

Observamos que dados dos puntos cualesquiera p y q en el disco, hay un único par de curvas de curvatura constante, una b y otra $-b$, que contienen a p y q .

Observación: sean P, Q, R tres puntos consecutivos sobre la curva γ , γ con $|k_h(z, \gamma)| = b$, tales que

$$d_{\mathbb{D}}(P, Q) = d_{\mathbb{D}}(Q, R) = L;$$

entonces el ángulo

$$\alpha = \angle([P, Q], [Q, R])$$

es en general una cierta función de expresión complicada de L y b . Afortunadamente, en el caso particular de mayor interés $b = 1$ (es decir, $\theta = 0$) la fórmula es muy sencilla:

$$\alpha = 2 \arctan(\sinh \frac{L}{2}).$$

Para ver por qué es así, tomamos tres puntos consecutivos z_1, z_2, z_3 tales que la distancia hiperbólica entre z_1 y z_2 y entre z_2 y z_3 sea L ; supongamos que están sobre el horociclo del semiplano superior $\gamma(s) = s + i$ (por invarianza conforme, esto no supone ninguna pérdida de generalidad). Así $z_k = x_k + i$

Un sencillo cálculo prueba que

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 2 \sinh \frac{L}{2};$$

por tanto las ecuaciones de las geodésicas que pasan por los puntos $x_1 + i$ y $x_2 + i$ y $x_2 + i$ y $x_3 + i$ son respectivamente

$$\begin{aligned} (x - (x_1 + \sinh \frac{L}{2}))^2 + y^2 &= (2 \cosh L - 1)^2 \\ (x - (x_1 + 3 \sinh \frac{L}{2}))^2 + y^2 &= (2 \cosh L - 1)^2, \end{aligned}$$

que en el punto de intersección $x_2 + i$ forman el ángulo deseado

$$\alpha = 2 \arctan(\sinh \frac{L}{2}).$$

Cálculos similares dan la fórmula que relaciona α y L cuando la curvatura es constante y distinta de 1. No damos ésta de forma explícita, pero hacemos notar que para cualquier curvatura b

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\alpha}{L} = b.$$

De hecho, si P, Q , y R son tres puntos consecutivos sobre la curva γ de curvatura hiperbólica variable, tales que

$$d_{\mathbb{D}}(p, Q) = d_{\mathbb{D}}(Q, R) =: L$$

y si α denota el ángulo

$$\alpha = \angle([P, Q], [Q, R]),$$

entonces se tiene que

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\alpha}{L} = k_h(Q, \gamma).$$

Si $|b| > 1$, y si C_r es un círculo hiperbólico de curvatura (constante) b (entonces la relación entre r y b es $b = \coth r$), la longitud hiperbólica de C_r , $L(C_r)$ se puede calcular fácilmente:

$$L(C_r) = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}} = 2\pi \sinh r.$$

Este cálculo será útil en la sección §2.3.

1.1.5 Regiones especiales del disco: paraguas

Resolvemos la siguiente cuestión, fundamental para la comprensión de los resultados de la sección 2.4.1:

Dados un punto $q \in \mathbb{D}$ y dos puntos p y r que estén a la misma distancia de q , queremos saber qué información sobre la posición del punto r se puede obtener en función del par de curvas de curvatura constante $|b|$ que pasan por p y q (ver §1.1.4).

A. CURVATURA CONSTANTE 1. En este caso, $b = 1$ y las curvas que consideramos son horociclos.

Recordamos que dos puntos cualesquiera $p, q \in \mathbb{D}$ tales que $d_{\mathbb{D}}(p, q) = L$ determinan un único par de horociclos que contienen p y q ; denotamos su unión por $H_{p,q}$. Dados dos puntos cualesquiera $p, q \in \mathbb{D}$ podemos definir la región $U(p, q)$, a la que llamaremos *paraguas*, como el cierre de la componente de $\mathbb{D} \setminus H_{p,q}$ que contiene a q , pero no a p , en su frontera.

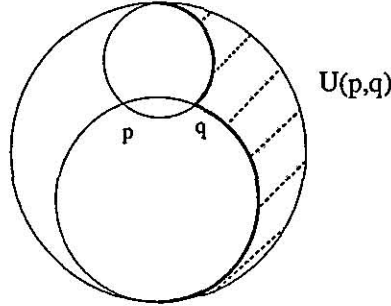


Figura 6

La siguiente propiedad de permanencia de estas regiones será un ingrediente fundamental en la prueba del Teorema 6:

Lema 1 (Propiedad de permanencia) Dado cualquier $c \in U(p, q)$ tal que $d_{\mathbb{D}}(c, q) = d_{\mathbb{D}}(p, q) = L$ tenemos

$$U(q, c) \subset U(p, q)$$

La prueba es inmediata. Para entender por qué es así, supongamos que $p = x \in (-1, 0)$ y $q = 0$. Del par de horociclos que determinan x y 0 denotamos por H^+ al que es tangente a $\partial\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$, y por H^- al otro.

Si $c \in H^+$ entonces uno de los horociclos que determinan 0 y c coincide con H^+ y el otro está “desplazado hacia arriba” con respecto a H^- sin llegar a H^+ . De forma más precisa: si H^+ es tangente a $\partial\mathbb{D}$ en el punto $e^{i\theta}$ (por simetría H^- será tangente en $e^{-i\theta}$) entonces el punto de tangencia del horociclo “desplazado” será $e^{i\xi}$ con $\xi \in (-\theta, \theta)$. Por esto $U(0, c) \subset U(x, 0)$.

Si $c \in H^-$ el mismo argumento es válido.

Y, finalmente, si $c \in U(x, 0) \setminus H_{x,0}$, lo que va a ocurrir es que uno de los horociclos que determinan 0 y c está “desplazado hacia abajo” respecto de H^+ sin llegar a H^- , y el otro “desplazado hacia arriba” sin llegar a H^+ (véase la siguiente figura, Figura 7).

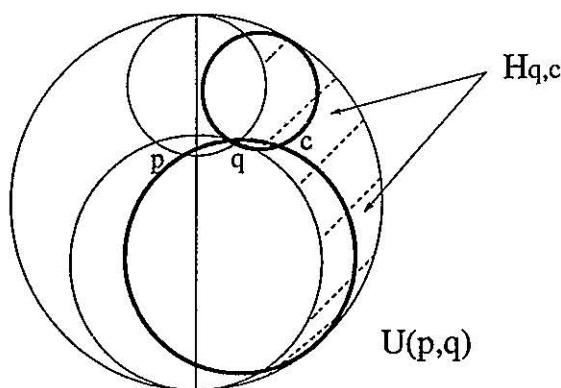


Figura 7

B. CURVATURA CONSTANTE $b \neq 1$. En este caso, dependiendo de que b sea mayor o menor que 1, la curva es o bien un arco de círculo que interseca a la frontera del disco con ángulo $\arccos b$, o bien un círculo cuyo radio hiperbólico depende de b (véase la sección §1.1.4). Recordamos que a cada b se le puede asociar un par (α, L) de forma que

$$\frac{\alpha}{L} \rightarrow b \text{ cuando } L \rightarrow 0$$

Si $|b| < 1$, podemos definir paraguas $U(p, q; b)$ como en la sección anterior (§1.1.5A) con las modificaciones obvias (i.e., la frontera de $U(p, q; b) \cap \mathbb{D}$ debería consistir en curvas de curvatura constante $|b|$) y tenemos una propiedad de permanencia semejante.

Sin embargo, si $|b| > 1$, $b = \coth r$, las curvas de curvatura constante b no escapan hacia la frontera de \mathbb{D} , y para tener una “propiedad de permanencia” se necesita una restricción en la longitud hiperbólica. Esto requiere algunas modificaciones en las regiones $U(p, q)$ que procedemos a describir ahora: Como en §1.1.5A, dos puntos cualesquiera $p, q \in \mathbb{D}$ con $d_{\mathbb{D}}(p, q) = L$ determinan un par único de curvas de curvatura constante b que contiene a p y a q ; las denotaremos por H_+^b y H_-^b , respectivamente. Parametrizamos cada una de ellas para que $H_{\pm}^b(0) = p$ y $H_{\pm}^b(L) = q$.

Para cada par (α, L) existe una colección de puntos en el disco $p_1 = p, p_2 = q, p_3, \dots, p_n \in H_+^b$ con $d_{\mathbb{D}}(p_i, p_{i+1}) = L$ de forma que

$$\begin{aligned} p_i &= H_+^b(s_i) & \text{para } s_i < \pi \sinh r \quad i = 1, \dots, n \\ p_{n+1} &= H_+^b(s_{n+1}) & \text{para } s_{n+1} > \pi \sinh r \end{aligned}$$

(respectivamente $q_1 = p, q_2 = q, \dots, q_n \in H_-^b$ con $d_{\mathbb{D}}(q_i, q_{i+1}) = L$). Recordamos que la longitud de H^b es $2\pi \sinh((\tanh b)^{-1})$ (véase §1.1.4, página 15).

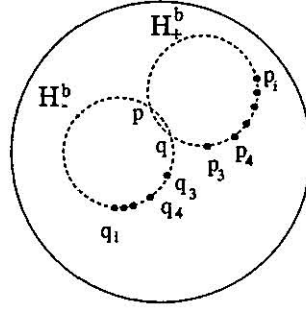


Figura 8

A cada par (α, L) le asociamos un $n = n(\alpha, L)$ de forma que la desigualdad anterior se cumpla.

Denotamos por $[p; q, \infty]$ la componente de $\gamma_{p,q} \setminus [p, q]$ que contiene a q en su frontera, donde $\gamma_{p,q}$ es toda la geodésica que contiene a p y a q . Esta notación sólo va a ser usada en esta sección.

Para cada par (α, L) y para $3 \leq m \leq n(\alpha, L)$ denotamos por:

$$H_+^{b,m} = \text{componente de } H_+^b \setminus [q, p_m] \text{ que no contiene a } p.$$

$$H_-^{b,m} = \text{componente de } H_-^b \setminus [q, q_m] \text{ que no contiene a } p.$$

$$H_{p,q}^{b,m} = \text{unión de las curvas } H_+^{b,m} \text{ y } H_-^{b,m}.$$

$$B_{p,q}^{b,m} = \text{unión de } H_{p,q}^{b,m} \text{ con los dos segmentos de geodésicas } [p; p_m, \infty] \cup [p; q_m, \infty].$$

$U(p, q; b, m)$ como el cierre de la componente de $\mathbb{D} \setminus B_{p,q}^{b,m}$ que no contiene al punto p en su interior.

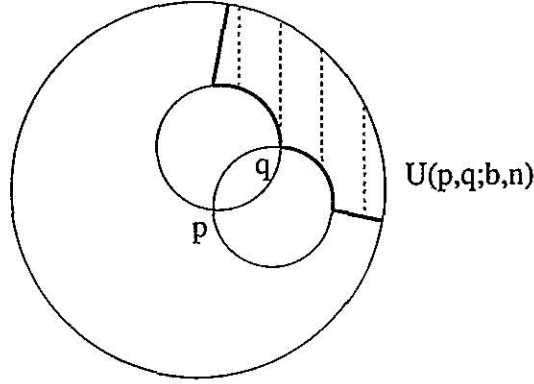


Figura 9

La propiedad de permanencia de estas regiones siguiente es fundamental en la prueba del Teorema 5. Para cada par (α, L) :

∴

Lema 2 (Propiedad de permanencia) Dado $c \in U(p, q; b, n)$ tal que $d_{\mathbb{D}}(c, q) = d_{\mathbb{D}}(p, q) = L$ tenemos

$$U(q, c; b, n-1) \subset U(p, q; b, n)$$

Una vez más, la prueba es inmediata, y la razón es la misma que la dada en §1.1.5A.

C. CURVATURA 1, PARAGUAS ESPECIALES. Necesitaremos en las secciones §2.4.2 y §2.5 algunos paraguas más. Éstos no se usan en la prueba del Teorema 6.

Sea $b = 1$, es decir, la curva es un horociclo; para cualesquiera $c, d \in \mathbb{D}$ definimos $H_{c,d}$ y $U(c, d)$ como en la sección §1.1.5A. Sean H^+ y H^- los dos horociclos en \mathbb{D} tales que $H_{c,d} = H^+ \cup H^-$.

Tomamos una colección de puntos $p_1 = c, p_2 = d, p_3, p_4, \dots, p_n \in H^+$ (respectivamente $q_1 = c, q_2 = d, q_3, q_4, \dots, q_n \in H^-$) de forma que $d_{\mathbb{D}}(p_i, p_{i+1}) = L$ (idem para los q_i).

Definimos las regiones $U(c, d; 1, m)$ como la componente de $U(c, d) \setminus ([c; p_m, \infty] \cup [c; q_m, \infty])$ que contiene al punto d en su frontera.

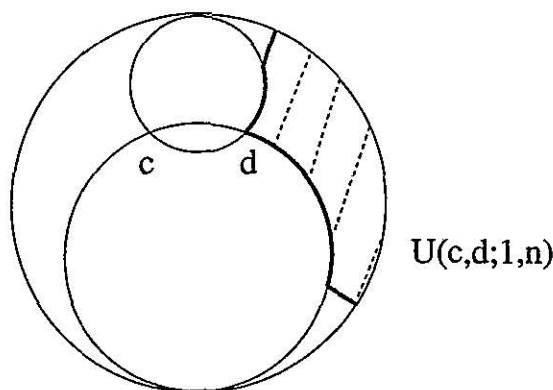


Figura 10

Lema 3 (*propiedad de permanencia*) para cualquier $e \in U(c, d; 1, n)$ tal que $d_{\mathbb{D}}(d, e) = L$,

$$U(d, e; 1, n-1) \subset U(c, d; 1, n)$$

De nuevo la prueba es inmediata.

1.2 Teorema de Schur, un resultado euclídeo

El teorema de Schur clásico básicamente regula el hecho de que si fijamos un extremo de un arco en un punto p , al “estirar” el arco (es decir, disminuir la curvatura) la distancia del extremo libre al origen aumenta. Este hecho es especialmente intuitivo cuando el origen coincide con el extremo fijo de la cuerda.

Para probar uno de los resultados fundamentales de esta primera parte de la memoria (ver Teorema 3) será conveniente establecer un resultado en \mathbb{D} de este estilo; es decir, un resultado que regule el comportamiento de la distancia entre el extremo libre de la cuerda y el punto fijo del disco cuando “estiramos” ésta. Dedicamos esta sección a recordar el Teorema de Schur; en realidad vamos a dar un enunciado (euclídeo) ligeramente distinto del que dió Schur (ver [DoC, pág. 405], [Ch, pág. 36]). En la siguiente sección, daremos una prueba nueva de este teorema que ya contiene algunas de las ideas que aparecen en la prueba del resultado hiperbólico.

Antes de enunciar el teorema es conveniente hacer la siguiente observación: aunque el hecho de que estirar una cuerda haga que sus extremos se alejen es intuitivo, es falso si no ponemos una restricción en la longitud de la cuerda como el ejemplo que damos a continuación prueba:

Sea $R > 0$, $\epsilon > 0$, y sea $s \in [0, 2\pi(R + \epsilon)]$; consideramos las curvas γ y Γ dadas de la figura siguiente

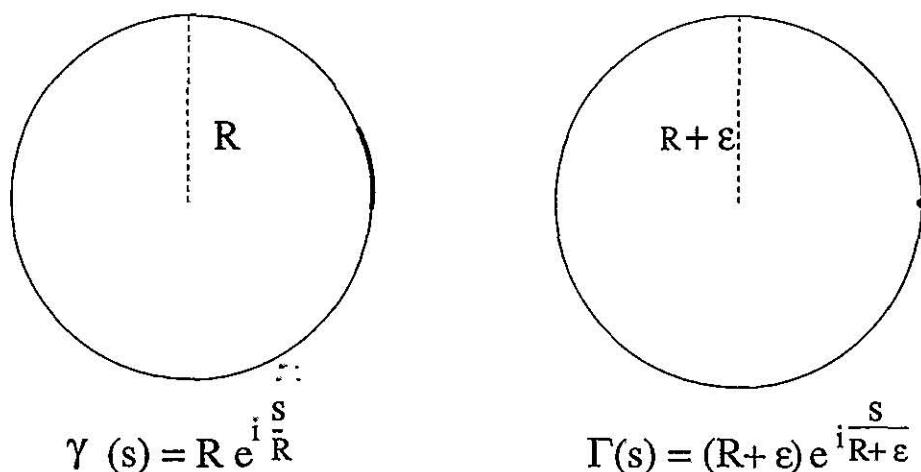


Figura 11

La curva Γ está “más estirada” que la curva γ y sin embargo sus extremos están más cercanos (a distancia 0).

En este ejemplo el teorema “falla” porque la curva es demasiado larga y vuelve sobre sí misma; la restricción en la longitud es necesaria en el plano euclídeo porque las únicas curvas que escapan al infinito son las de curvatura cero. Esto hace sospechar que en \mathbb{D} no va a ser necesaria restricción alguna sobre la longitud de las curvas de curvatura hiperbólica constante y menor o igual que 1, ya que éstas escapan al infinito; sin embargo puede que sí haga falta para las de curvatura mayor, que pueden volver sobre sí mismas. Esta sospecha se confirmará de forma rigurosa en §2.3.

Para simplificar notación, en esta sección y sin que deba dar lugar a confusión alguna, omitiremos el superíndice \mathbb{R}^2 para indicar objetos en el plano euclídeo. Así, una curva en el plano será denotada simplemente por γ en lugar de $\gamma^{\mathbb{R}^2}$.

El Teorema de Schur establece lo siguiente:

Teorema de Schur: Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva suave parametrizada por longitud de arco cuya curvatura está acotada en valor absoluto por una constante fija k . Sea p un punto cualquiera en \mathbb{R}^2 . Entonces, la distancia euclídea de p a $\gamma(s)$ tiene la cota inferior universal óptima siguiente:

$$d_e(p, \gamma(s)) \geq K(s, k, d) \quad s \in (0, \pi/k), \quad (1.3)$$

donde la cota se alcanza sobre una curva C de curvatura constante e igual a $\min(k, 1/d)$, donde d es la distancia de p a la curva γ .

De forma más precisa, si x_0 es el punto en γ que está más cerca de p (es decir, $d = |p - x_0|$) entonces

$$d_e(p, \gamma(s)) \geq d_e(p, C(s)) \left(= \sqrt{d^2 + \frac{2}{k} \left(\frac{1}{k} - d \right)^+ \left(1 - \cos\left(\frac{1}{sk}\right) \right)} \right)$$

Aquí C es el círculo de radio $\max(d, 1/k)$, tangente a γ en x_0 , con $C(0) = x_0$ que contiene a p en su interior.

Observamos la notación $x^+ = \frac{|x| + x}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

El enunciado usual del Teorema de Schur es ligeramente diferente:

- (a) Por un lado es menos general porque se supone que el punto p está en la curva γ .
- (b) Pero por otro lado es más general porque compara la curva γ con una curva γ^* cuya curvatura no es necesariamente constante (ver [Ch] para más detalles).

Es importante señalar que el teorema es óptimo en el sentido de que existen curvas γ para las que el resultado es falso si $s \geq \frac{\pi}{k}$ (es decir, si permitimos recorrer más de medio círculo de radio $1/k$); un ejemplo viene dado en la siguiente figura, Figura 12, donde, con la notación del teorema, tomamos un $\epsilon > 0$ y tomamos p de forma que $d = 1/k$,

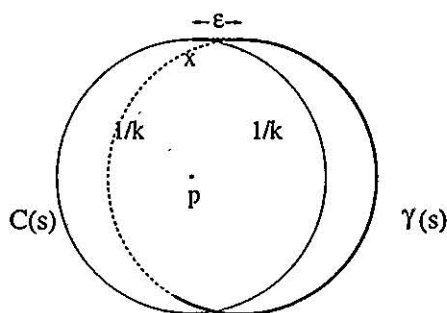


Figura 12

Antes de pasar a la prueba de este teorema recordamos algunos resultados sobre curvatura euclídea que serán fundamentales para entenderla (obsérvese el paralelismo con §1.1.4):

- Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva con curvatura constante k ; entonces γ es un arco de círculo de radio $1/k$. (Entendemos aquí las rectas como círculos de radio infinito.)
- Dados un punto $p \in \mathbb{R}^2$ y una dirección fija, hay dos curvas tangentes a dicha dirección en p , sus curvaturas son k y $-k$ respectivamente.
- Si p, q, r son tres puntos consecutivos sobre la curva γ de curvatura constante k , tales que

$$|p - q| = |q - r| = L,$$

y si denotamos por α el ángulo (véase la notación de §1.1.4)

$$\alpha = \angle \{[p, q], [q, r]\},$$

unos cálculos similares a los hechos en la sección §1.1.4 dan

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{L}{2} k \right)$$

y por tanto $\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\alpha}{L} = k$.

- Observamos que dos puntos cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}^2$, $|p - q| = L$, determinan un único par de curvas de curvatura k que contienen a p y q ; denotaremos su unión por $C_{p,q}^k$. Será conveniente también introducir la siguiente notación, que sólo será válida en esta sección y en la siguiente: dados dos puntos p y q con $|p - q| = L$, consideramos el círculo centrado en q y de radio L , $C(q, L)$, y definimos el arco $I_{p,q}$ como la componente de $C(q, L) \setminus (C(q, L) \cap C_{p,q}^k)$ que no contiene a p en su frontera.

1.2.1 Una prueba del Teorema de Schur

Vamos a dividirla en dos pasos: en el primero suponemos que el punto p está en la curva, y en el segundo usamos un Teorema de Schwarz para obtener el resultado general.

Paso I: p en la curva γ

En este caso queremos probar que para el círculo C descrito arriba

$$|C(0) - C(s)| \leq |\gamma(0) - \gamma(s)| \quad \text{para todo } s \in \left(0, \frac{\pi}{k}\right) \quad (1.4)$$

con $C(0) = \gamma(0)$ y $C'(0) = \gamma'(0)$.

La estructura de la prueba va como sigue: probaremos (1.4) para el caso particular en el que las curvas sean poligonales, y después daremos un argumento de aproximación que permite derivar el caso general.

(I.A): *Curvas poligonales.*

Fijamos un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ que servirá de punto de referencia.

Denotamos por $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ a una curva poligonal parametrizada por longitud de arco, consistente en un número determinado de segmentos geodésicos, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, de igual longitud L llamados *lados*, que conectan *vértices* $p_0 = x_0, p_1, \dots, p_n$, es decir

$$\begin{aligned} p_0 &= x_0 &= \gamma_1(0) \\ p_i &= \gamma_i(L) &= \gamma_{i+1}(0), \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ p_n &= \gamma_n(L) \end{aligned}$$

y de forma que los θ_i son ángulos entre segmentos consecutivos, esto es

$$\theta_i = \angle(\gamma'_i(L), \gamma'_{i+1}(0)) \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1.$$

Observamos que $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ está determinada de forma única por los datos dados, es decir, los ángulos y la longitud L , salvo rotación alrededor de x_0 . Obsérvese también que cada vértice p_j está dado en términos de la parametrización de toda la curva poligonal por $p_j = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(jL)$, (i.e., p_j es el vértice de la poligonal en tiempo j), y que la longitud total de la poligonal es nL .

Un ejemplo especialmente importante de poligonal, por su papel extremal, es $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ donde β y L se relacionan por

$$\beta = 2 \arcsin\left(\frac{L}{2}k\right) \quad (1.5)$$

En éste caso los puntos $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(jL)$ for $j = 0, \dots, n$ yacen sobre el mismo círculo de radio $1/k$ (ver el final de la sección anterior). En el resto de la sección, L y β permanecerán fijos y ligados mediante la expresión anterior.

Probar (1.4) para curvas poligonales significa probar el siguiente resultado,

Teorema 1 *Versión poligonal del Teorema de Schur (TSP)* Sean $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ y $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ dos curvas poligonales tales que

$$P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(0) = P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(0) \quad \text{y} \quad P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(L) = P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(L)$$

Si $|\alpha_i| \leq \beta$ para todo i , entonces para todo n tal que $n\beta \leq \pi$

$$d(x_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(x_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)) \quad (1.6)$$

Observamos que la restricción sobre n es la análoga a la restricción de la longitud de la curva que necesitamos en el caso general (cuando $n\beta = \pi$ hemos recorrido medio círculo de radio k).

Demostración. Sean p_j y q_j los vértices en tiempo j de las poligonales $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ y $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ respectivamente (ver arriba). Sin pérdida de generalidad $x_0 = p_0 = q_0 = 0$ y $p_1 = q_1 = L$.

Dado $q \in \mathbb{R}^2$ resulta conveniente denotar por \bar{q} al punto simétrico de q respecto de la recta real. Si imponemos que $P_{(-\beta, \dots, -\beta; L)}(L) = L$ entonces $\bar{q}_j = P_{(-\beta, \dots, -\beta; L)}(jL)$. (Véase la Figura 13 siguiente.)

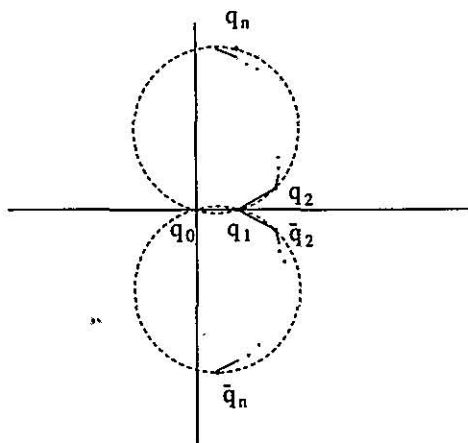


Figura 13

Hay dos caminos naturales para probar este teorema:

camino 1: Éste es un teorema de localización: afirma que si trazamos los círculos centrados en q_0 de radio $|q_0 - q_n|$ que pasan por q_n y \bar{q}_n respectivamente, el punto p_n queda fuera de estos círculos. Es decir, una manera de probar este teorema es determinar la región en la que p_n puede estar en función del par de curvas de curvatura constante k que pasan por q_0 y q_1 (ver §1.2 y el parecido con la idea de los paraguas de §1.1.5). Daremos una idea de cómo se probaría así.

camino 2: Por la idea que hay detrás de la prueba: tomamos una poligonal cualquiera que comience en el origen y vamos girando los lados en un sentido u otro. La forma de quedarse lo más cerca posible del origen es girar siempre en el mismo sentido y lo máximo que se pueda, es decir, girar siempre β ($-\beta$ por simetría). Por esto $|q_n| \leq |p_n|$.

Idea de la prueba del TSP por el camino 1.

Recordamos la notación de $C_{p,q}^k$ e $I_{p,q}$ dadas en §1.2 y recordamos que tenemos fijos $p_0 = q_0 = 0$, $p_1 = q_1 = L$. Por simetría suponemos que $\alpha_1 \geq 0$. La Figura 15 deja clara la idea de la prueba.

Supongamos que $n = 2$. Fijamos la curva $C_{0,L}^k$; el punto $p_2 \in I_{0,L}$ ya que $|p_2 - p_1| = L$ y $\alpha_1 \leq \beta$. Claramente el punto de $I_{0,L}$ más próximo a 0 es q_2

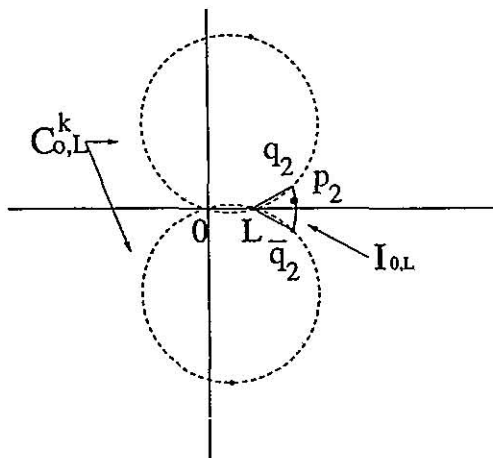


Figura 14

Lo mismo pasa para $n > 2$: en cada paso $j + 1$ fijamos el punto p_{j-1} y la curva $C_{p_{j-2}, p_{j-1}}^k$ y consideramos las curvas C_{p_{j-1}, p_j}^k como una función del punto p_j , con $p_j \in I_{p_{j-2}, p_{j-1}}$. Para cada p_j tenemos una C_{p_{j-1}, p_j}^k determinada; el punto del arco I_{p_{j-1}, p_j} más cercano a 0 está en su intersección con la curva C_{p_{j-1}, p_j}^k . Si ahora dejamos que el punto p_j se mueva en $I_{p_{j-2}, p_{j-1}}$, el punto sobre la intersección de la curva C_{p_{j-1}, p_j}^k con el arco I_{p_{j-1}, p_j} , (como función de p_j) que minimiza la distancia a 0 es el que está sobre C_{p_{j-1}, q_j}^k (es decir, cuando el ángulo $\alpha_{j-1} = \beta$, el máximo posible).

La figura siguiente esquematiza la situación con tres puntos, donde los círculos C^k están dibujados con línea discontinua o punteada, los arcos I con trazado continuo grueso, y el círculo centrado en cero y de radio $|q_3|$ en trazado continuo fino; observamos que el arco $I_{1,2}$ está en el exterior de dicho círculo. :

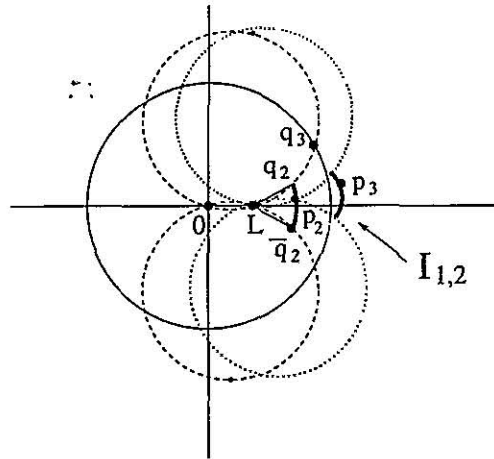


Figura 15

Observamos que los puntos iniciales 0 y L no juegan ningún papel especial.

Prueba de TSP por el camino 2

Recordamos que $p_j = P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(jL)$, $p_0 = 0$ y $p_1 = L$. Obsérvese que

$$p_{j+1} = L \left[1 + e^{i\alpha_1} + e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)} + \dots + e^{i(\alpha_1 + \dots + \alpha_j)} \right]$$

para $j = 1, \dots, n-1$.

Consideramos la función (normalizada) de $n - 1$ variables

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \frac{|p_n|^2}{L^2}.$$

Probar el teorema es equivalente a probar que

$$\min_{\alpha_l, |\alpha_l| \leq \beta} f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = f(\beta, \dots, \beta) = f(-\beta, \dots, -\beta).$$

El problema es totalmente simétrico en los α_j 's; restringiremos la función a una determinada dirección y calcularemos su mínimo. El resultado no dependerá de la dirección elegida ya que

$$\begin{aligned} f &= |1 + e^{i\alpha_1} \underbrace{(1 + e^{i\alpha_2} + \dots + e^{i(\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})})}_z|^2 \\ &= |1 + e^{i\Omega_1} \underbrace{(1 + e^{-i\alpha_2} + \dots + e^{i(\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1})})}_z|^2, \end{aligned}$$

con $\Omega_1 = \alpha_1 + \alpha_2, |\Omega_1| \leq 2\beta$.

Tomamos la dirección α_1 y sea $z = 1 + e^{i\alpha_2} + \dots + e^{i(\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})} =: re^{i\omega}$; observamos que debido a que $(n-1)\beta \leq \pi$, entonces $|\omega| \leq \pi - \beta$.

Reescribimos f en términos de α_1 y z como

$$f(\alpha_1, re^{i\omega}) = 1 + 2r \cos(\alpha_1 + \omega) + r^2,$$

y así es claro ver que el mínimo de f se alcanza para $\alpha_1 = \pm\beta$ y por tanto para $\alpha_j = \pm\beta$, para todo $j = 1, \dots, n-1$.

Para finalizar, sólo es necesario observar que de forma obvia todos los ángulos α_j son o bien $+\beta$ o bien $-\beta$ simultáneamente, por tanto f alcanza el mínimo en $(\alpha_l) = \pm(\beta)$, que era el resultado que queríamos probar.

Con esto finaliza la prueba de la versión poligonal del Teorema de Schur.

□

(I.B) Curvas.

Queremos ver que

$$d(x_0, \gamma(s)) \geq d(x_0, C(s)), \quad \text{para cada } s \in (0, \frac{\pi}{k}). \quad (1.7)$$

Para esto fijamos $s \leq \frac{\pi}{k}$ y fijamos también un paso pequeño L de la forma $L = \frac{s}{n}$, donde n es un entero positivo; aproximamos C y γ por curvas poligonales $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ y $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ respectivamente de la siguiente forma:

para aproximar C tomamos $q_0 = x_0 \in C$ y determinamos puntos sucesivos $\{q_i\}_{i=1}^n$, $q_i \in C$, de forma que $|q_{i+1} - q_i| = L$, para $i = 0, \dots, n-1$; obsérvese que los ángulos de la curva poligonal construida de esta manera son todos iguales a $\beta = 2 \arctan(\sinh L/2k)$ (véase los comentarios hechos tras el Teorema de Schur, sección §1.2);

para aproximar γ tomamos $p_0 = z_0 \in \gamma$, y determinamos puntos sucesivos $\{p_i\}_{i=1}^n$, $p_i \in \gamma$, de forma que $|p_{i+1} - p_i| = L$, para $i = 0, \dots, n-1$; obsérvese que los ángulos α_i de la poligonal así construida satisfacen la relación $|\alpha_i| \leq \beta$, si L es lo suficientemente pequeño. Esto, claro, se debe a que la curvatura de γ es estrictamente menor que k en valor absoluto (ver comentarios tras el Teorema de Schur, sección §1.2).

Por la versión poligonal del Teorema de Schur tenemos

$$d(x_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(x_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)),$$

Si dejamos ahora que $L \rightarrow 0$, deducimos de lo anterior que

$$z : d(x_0, \gamma(s)) \geq d(x_0, C(s)).$$

Paso II: p fuera de la curva γ

Recordamos que queremos probar que

$$|p - \gamma(s)| \geq |p - C(s)| \quad \forall s \in (0, \pi/k)$$

para cualquier punto $p \in \mathbb{R}^2$, donde C es el círculo de radio $1/k$ tangente a γ en el punto de la curva más próximo a p , $\gamma(0)$.

Como anunciamos al principio de esta sección, para probar esta parte es necesario usar tanto un resultado clásico de Schwarz como un lema de "localización".

A continuación enunciamos, aunque no probaremos, el Teorema de Schwarz que da cotas para la longitud de un segmento de curva en función de la curvatura de ésta (ver [Ch, pág 38] para una prueba de este resultado):

Teorema S. *Sea γ una curva en \mathbb{R}^2 que une dos puntos cualesquiera A y B , cuya curvatura está acotada en valor absoluto por k , donde $\frac{1}{k} \geq \frac{|A - B|}{2}$. Sea C un círculo de radio $1/k$ que pasa por A y B . Entonces la longitud de γ es o bien menor o igual que la del arco más corto del círculo C que va de A a B , o bien mayor o igual que la del arco más largo.*

Procedemos finalmente a enunciar el lema de “localización” que necesitamos para continuar con la prueba del Paso II; lo probamos al final de la sección. Básicamente, éste nos determina en qué región del plano están los puntos de curvas de curvatura acotada en función de la cota para la curvatura y de un punto de dicha curva.

Lema 4 Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ con $|k_e(z, \gamma)| \leq k$, y sean C^+ y C^- los dos círculos de curvaturas k y $-k$ respectivamente tangentes a γ en $\gamma(0)$, parametrizados para que $C^+(0) = C^-(0) = \gamma(0)$.

Sea $\Gamma(s)$ el cono con vértice en $\gamma(0)$ que contiene a los puntos $C^+(s)$ y $C^-(s)$ en su frontera y a $\gamma(\epsilon)$, $\epsilon > 0$ en su interior.

Entonces, para cualquier tiempo $s \in \left(0, \frac{\pi}{k}\right)$:

- (a) $\gamma(s)$ está en la intersección de la clausura componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus (C^+ \cup C^-)$ con $\Gamma(s)$ (mismo tiempo s),
- (b) si $\gamma(s) = C(s)$ para algún s , γ coincide con C hasta tiempo s

Observamos que la restricción en la longitud s es la equivalente a la restricción en el Teorema de Schur. Al igual que éste, si $s > \frac{\pi}{k}$, el lema es falso; es decir, existen curvas γ que no verifican (a) y (b).

Tras este paréntesis, continuemos con la prueba del Teorema de Schur.

En principio deberíamos distinguir dos casos dependiendo de que la distancia del punto p a la curva γ fuese mayor o menor que $1/k$, pero como los argumentos son los mismos en ambos casos, sólo probaremos aquí el de $d < 1/k$.

Para simplificar notación fijamos x_0 como el punto de γ más cercano a p , es decir, $d_e(p, \gamma(s)) = |p - x_0|$, y, sin pérdida de generalidad suponemos también que la curvatura k es $k = 1$.

Sea C el círculo de radio 1 tangente a γ en el punto x_0 ; sin pérdida de

generalidad suponemos que está centrado en 0 y que está parametrizado de forma que

$$\begin{aligned} C(0) &= x_0 \\ C'(0) &= (1, 0) \end{aligned}$$

(es decir, el punto x_0 es $x_0 = (0, 1)$). Obsérvese que p está en el segmento que une 0 y x_0 .

Tomamos $s_0 \in (0, \pi)$; queremos probar

$$|p - C(s_0)| \leq |p - \gamma(s_0)| \quad (1.8)$$

sabiendo que (paso I)

$$|x_0 - C(s_0)| \leq |x_0 - \gamma(s_0)| \quad (1.9)$$

Probar (1.8) equivale a probar que el punto $\gamma(s_0)$ está situado en el exterior del círculo centrado en p y de radio $|p - C(s_0)|$. Sabemos por 1.9 que $\gamma(s_0)$ queda en el exterior del círculo centrado en x_0 de radio $|x_0 - C(s_0)|$.

La única región “conflictiva” es la zona A , sombreada en la figura siguiente, figura 16. Probar (1.8) se reduce pues a probar que $\gamma(s_0) \notin A$. Para esto obsérvese que, con la notación anterior $C = C^+$; como A está contenida en la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$, el Lema 4 garantiza que $\gamma(s_0) \notin A$.

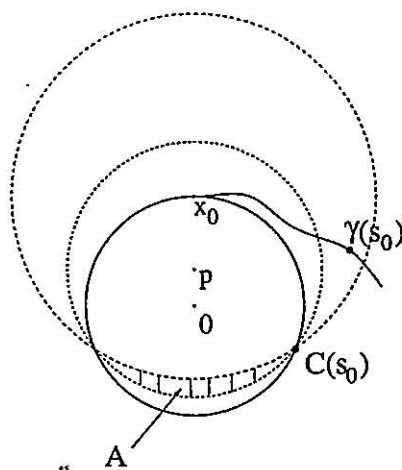


Figura 16

Con esto quedaría probado (1.8) y por tanto el Teorema de Schur. Sólo necesitamos probar el Lema 4 para terminar.

Prueba del Lema 4

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$C(0) = \gamma(0) = 0 \quad \text{y} \quad C'(0) = \gamma'(0) = (1, 0).$$

Fijamos L y β relacionados por

$$\beta = 2 \arcsin \left(\frac{L}{2} k \right)$$

(ver §1.2) y aproximamos C y γ por poligonales como en el paso I de forma que, con la notación allí introducida, $x_0 = p_0 = q_0 = 0$ y $q_1 = p_1 = L$.

Sea Γ_n el cono euclídeo con vértice 0 que contiene a q_n y \bar{q}_n en su frontera y al punto L en su interior. Trivialmente se sigue que

- (a) p_n está en la clausura de la componente de $\Gamma_n \setminus (P_{(\beta, \dots, \beta; L)} \cup \bar{P}_{(\beta, \dots, \beta; L)})$ que contiene al intervalo $(0, \infty)$, donde $\bar{P}_{(\beta, \dots, \beta; L)} =: P_{(-\beta, \dots, -\beta; L)}$.
- (b) $p_n = q_n^*$ si y sólo si $p_j = q_j$ para todo $j \leq n$.

Para ver esto basta observar simplemente que lo máximo que pueden girar los ángulos α_j es β o $-\beta$, y que sólo en el caso de que todos giren $+\beta$ los vértices caen sobre $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ (y si giran $-\beta$ sobre $\bar{P}_{(\beta, \dots, \beta; L)}$).

Con el argumento de aproximación del paso I.B obtenemos los resultados (a) y (b) del Lema 4.

Con esto queda finalmente el probado el Teorema de Schur.

Capítulo 2

Geometría conforme y curvatura hiperbólica

El propósito fundamental de este capítulo es entender el Teorema de Hayman y Wu desde un punto de vista geométrico, para obtener conclusiones de teoría de funciones. Mostraremos para ello la relación existente entre el resultado geométrico clásico de Schur de la sección §1.2 y el Teorema de Hayman-Wu de aplicaciones conformes.

La estructura del capítulo es la siguiente:

2.1 Problema de Hayman y Wu.

2.2 La constante de Hayman-Wu para dominios convexos.

2.2.1 El Teorema de Hayman-Wu, un resultado de geometría hiperbólica.

2.3 Teorema de Estiramiento de Curvas (TEC).

2.3.1 Prueba del Teorema 3.

2.4 Prueba del Teorema de Estiramiento de Curvas.

2.4.1 Versión poligonal del TEC.

2.4.2 Prueba del TEC.

2.5 Un Teorema de comparación para cuñas curvadas.

2.1 Problema de Hayman y Wu

En esta sección tratamos el problema clásico de W.K. Hayman y J.G. Wu sobre aplicaciones conformes.

El **Teorema de Hayman-Wu** [HW] (véase también [GGJ], [FHM], [BJ]) afirma que si f es una función conforme de un dominio simplemente conexo Ω sobre \mathbb{D} , y L es una línea recta cualquiera en \mathbb{C} , entonces

$$\Lambda(f(\Omega \cap L)) \leq C \quad (2.1)$$

donde C es una constante absoluta y Λ denota longitud euclídea.

Denotamos por HW el ínfimo de las constantes C para las que (2.1) es válido para toda aplicación f , dominio Ω y línea L .

La mejor cota superior conocida hoy en día es $C \leq 4\pi$ y ha sido obtenida, usando argumentos totalmente diferentes, tanto por K. Øyma (1992) como por S. Rohde (1998). El primero, siguiendo la idea de la prueba original de Hayman y Wu, usa la medida armónica como herramienta principal; el segundo vuelve a los métodos ya usados por [FHM] (1989) en los que la densidad hiperbólica es la pieza clave.

Damos a continuación una breve descripción de lo hecho por cada uno, y una prueba original basada en la demostración de Øyma que apunta en la dirección de las ideas que se desarrollarán en esta memoria. Antes señalamos que:

1. B.Brown (1985) probó que si $L \subset \Omega$, la constante óptima de Hayman-Wu es $HW = \pi^2$.
2. La constante óptima para el caso general se desconoce. La conjetura es que, de nuevo, $HW = \pi^2$.
3. Øyma dió un ejemplo para el que $\Lambda(f(\Omega \cap L)) \geq \pi^2$ de manera que sabemos que $HW \geq \pi^2$; explicaremos este ejemplo más adelante en esta sección.
4. Si el dominio Ω es convexo, se probará en la siguiente sección que $\Lambda(f(\Omega \cap L)) < 2\pi$ para f y L como en (2.1); esta constante es óptima (obsérvese el menor estricto).

Cotas de ϑ yma

Como hemos anunciado arriba, los métodos usados por K. ϑ yma para probar

$$\pi^2 \leq C \leq 4\pi$$

se basan en argumentos de **medida armónica** (véase [Ø1],[Ø2]). En la prueba de ambas desigualdades la idea clave consiste en asociar a componentes de $\Omega \cap L$ conjuntos disjuntos de la frontera de Ω en los que se puede estimar “adecuadamente” la medida armónica. Veremos a continuación qué significa “adecuadamente” en cada uno de los casos.

A. Para verificar que $HW \geq \pi^2$ se construye un dominio Ω donde:

1. Las componentes de $\mathbb{R} \cap \Omega$ son “casi” geodésicas.
2. La forma de asociar intervalos de frontera a componentes de $\mathbb{R} \cap \Omega$ es tal que
 - las imágenes de los intervalos y de los conjuntos de la frontera en el disco tienen longitudes euclídeas comparables, y
 - la medida armónica de la frontera asociada a la unión de todas las componentes de $\mathbb{R} \cap \Omega$ es 1.

Este dominio Ω se construye de forma iterativa como sigue: consideramos un círculo, S_1 , centrado en el semiplano superior, \mathbb{H} , de radio muy grande y tal que corta al eje real en 0 y 1 con un ángulo pequeño, ϵ ; consideramos como Ω_1 la unión del semiplano inferior con la componente de $\mathbb{C} \setminus S_1$ que contiene al centro de S_1 .

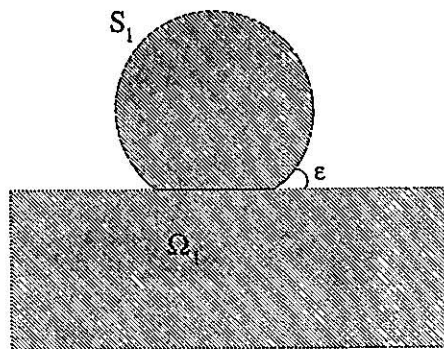


Figura 17

$\mathbb{R} \cap \Omega_1 = (0, 1)$ es “casi” una geodésica. La idea es asociar a $(0, 1)$ el conjunto de frontera $S_1 \cap \mathbb{H}$, pero éste no tiene medida armónica 1. Para

conseguir que la frontera asociada tenga medida mayor, intentando que ésta sea 1, iteramos el proceso y obtenemos el dominio Ω_2 descrito en la siguiente figura

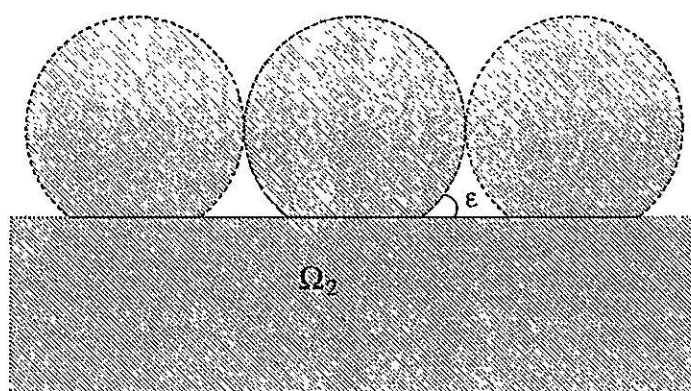


Figura 18

finalmente, “rellenando huecos” obtenemos el dominio Ω buscado:

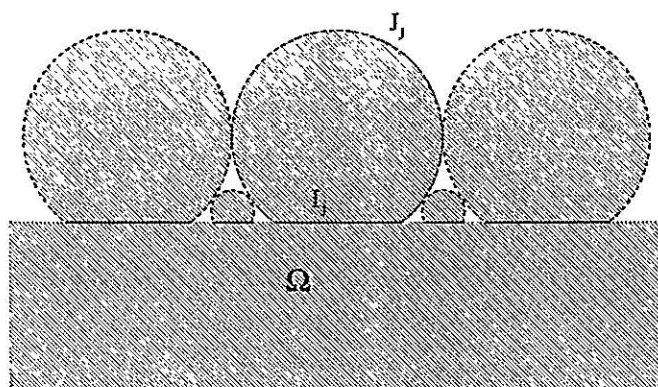


Figura 19

y $f(\mathbb{R})$ es el conjunto de curvas del disco mostradas en la siguiente figura, Figura 20:

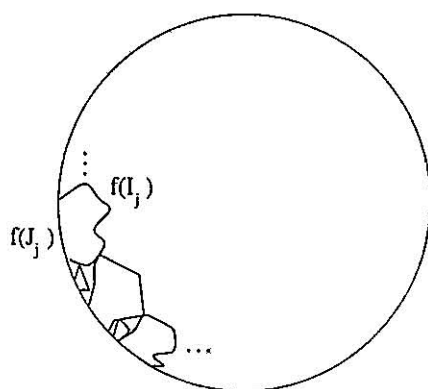


Figura 20

Para cada “casi” geodésica $f(I_j)$ y su arco $f(J_j)$ en \mathbb{D} ,

$$\Lambda(f(I_j)) \geq \frac{\pi}{2} \Lambda(f(J_j)) - \epsilon, \quad \epsilon > 0$$

donde Λ denota la longitud euclídea. Sumando sobre todos los intervalos, y debido a que la medida armónica de la frontera sobre la que sumamos es 1, obtenemos que la constante de Hayman-Wu para este dominio Ω es al menos π^2 .

B. Para estimar la cota superior, 4π , se asocia a cada intervalo I de la recta un conjunto J de frontera tal que la longitud hiperbólica de I sea comparable a la medida armónica (desde $z \in I$) de J . Damos aquí una prueba **nueva** de este resultado de Øyma basada en esta idea clave. Para ello definimos el funcional $I(\Omega, L)$ como

$$I(\Omega, L) = \int_{\Omega \cap L} e^{-d_{\Omega}(a, s)} \lambda_{\Omega}(s) |ds|$$

donde $\lambda_{\Omega}(s) |ds|$ denota el elemento de arco hiperbólico, y a es un punto del dominio Ω . Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 2 Sea Ω un dominio simplemente conexo, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme. Entonces:

$$(1) \quad \Lambda(f(\Omega \cap L)) \leq 2I(\Omega, L)$$

$$(2) \quad I(\Omega, L) \leq 2\pi$$

y por tanto $C \leq 4\pi$.

Observación: S. Rohde [R1] ha mejorado este resultado a $C \leq 4\pi - \epsilon$ para un ϵ universal gracias a un análisis cuidadoso de la prueba realizada por Øyma.

En este teorema consideramos ciertas curvas del disco y acotamos su longitud euclídea por un funcional que depende de la distancia hiperbólica; en el Lema 5 de la siguiente sección, probaremos que, para estas curvas, la longitud euclídea es un funcional que depende de la distancia hiperbólica.

Demostración.

(1) Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda(f(\Omega \cap L))}{2} &= \frac{1}{2} \int_{(f(\Omega \cap L))} |dz| \leq \int_{(f(\Omega \cap L))} \frac{1-|z|}{1+|z|} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \\ &= I(\mathbb{D}, f(\Omega \cap L)) = I(\Omega, L) \end{aligned}$$

(2) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L = \mathbb{R}$.

Supongamos que el dominio Ω es simétrico con respecto a \mathbb{R} (es decir: \mathbb{R} es una geodésica). Tomamos $I \subset \mathbb{R}$ con longitud hiperbólica $l_h(I) = \epsilon$, y denotamos por z el punto medio de I .

A este intervalo I le asociamos el siguiente conjunto J de la frontera: tomamos las geodésicas perpendiculares a \mathbb{R} que pasan por los puntos de I ; J es el conjunto formado por la intersección de la frontera con dichas geodésicas.

Consideramos la aplicación conforme $g : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ con $g(z) = z$ y $g(\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$; obsérvese que $g(J) = (-e^{\epsilon/2}, -e^{-\epsilon/2}) \cup (e^{-\epsilon/2}, e^{\epsilon/2}) \subset \mathbb{R}$. Una estimación sobre la medida armónica de $g(J)$ desde z , $w(z, g(J), \mathbb{H})$, prueba

que

$$\omega(z, J, \Omega) := \psi(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi} + O(\epsilon^2).$$

donde $w(\xi, I, D)$ denota la medida armónica de $I \subset \partial D$ en D desde el punto $\xi \in D$.

Si Ω no fuese simétrico respecto de \mathbb{R} , aplicamos el argumento anterior a cada componente Ω_i de $\Omega \cap \Omega^s$, donde Ω^s es el simétrico de Ω respecto de \mathbb{R} (obsérvese que cada Ω_i es simétrico respecto de \mathbb{R}). Si L_i son las componentes conexas de $L \cap \Omega$, $I_{i,j}$ son los intervalos de L_i de longitud hiperbólica ϵ y $z_{i,j}$ sus puntos medios:

$$\omega(z_{i,j}, J_{i,j}, \Omega_i) := \psi(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\pi} + O(\epsilon^2).$$

Escribimos $J_{i,j} = A_{i,j} \cup A_{i,j}^s$ donde $A_{i,j} \subset \partial\Omega$. Esto, junto con el principio de subordinación de la medida armónica nos permite minorar $\psi(\epsilon)$, es decir,

$$\psi(\epsilon) \geq 2\omega(z_{i,j}, A_{i,j}, \Omega_i) \geq \omega(z_{i,j}, A_{i,j}, \Omega);$$

usando ahora la desigualdad de Harnack para quitar la dependencia del punto $z_{i,j}$ y, finalmente, sumando sobre todos los intervalos obtenemos:

$$\frac{1}{2} \sum e^{-d_\Omega(a, z_{i,j})} \frac{\psi(\epsilon)}{\epsilon} \epsilon \leq \sum_{i,j} \omega(a, A_{i,j}, \Omega) \leq 1$$

donde la última desigualdad se debe a que los $A_{i,j}$ son disjuntos. Haciendo ahora $\epsilon \rightarrow 0$, se sigue la parte (2) del teorema.

□

Cota de Rohde

Como dijimos al principio de la sección, S.Rohde vuelve a los métodos ya utilizados por [FHM] en su prueba de $C \leq 4\pi^2$ para conseguir demostrar que $C \leq 4\pi$. El interés de la prueba de Rohde reside en que abre nuevos caminos para intentar probar la conjetura $HW = \pi^2$.

La idea clave está en asociar a Ω otro dominio $\tilde{\Omega}$ de forma que las **densidades hiperbólicas** de ambos sean comparables. Vamos a enunciar a continuación, sin dar detalles de la prueba, una serie de lemas que establecen comparaciones entre densidades y que permiten concluir que $C \leq 4\pi$. Todos ellos se deben a S. Rohde [R2]:

Lema R1 Sean $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{C}$ dos dominios simplemente conexos, con $\Omega_0 \subset \Omega_1$. Consideramos una curva $\gamma \subset \Omega_1$ con la propiedad de que $\gamma \cap \Omega_0$ sea geodésica en Ω_0 . Entonces, para cualquier $z_0 \in \gamma \cap \Omega_0$,

$$\lambda_{\Omega_0}(z_0) \geq \frac{k_{\Omega_1}(z_0, \gamma) + 2}{2} \lambda_{\Omega_1}(z_0)$$

donde $k_{\Omega_1}(z_0, \gamma)$ es la curvatura geodésica en Ω_1 de γ en el punto z_0 . Esta cota es óptima

La prueba se basa en la invarianza conforme de la curvatura hiperbólica, la relación que existe entre la densidad hiperbólica en un punto de Ω y la derivada de su función de Riemann en la imagen de dicho punto, en la relación entre las curvaturas hiperbólica y euclídea (ver §1.1.1), y en el hecho de que si $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es univalente, la curvatura euclídea de un segmento se puede escribir en términos de ψ' y ψ'' .

A nosotros nos interesará considerar el caso particular en el que γ sea $\mathbb{R} \cap \Omega_1$ y, si denotamos por Ω^s el simétrico de Ω alrededor de \mathbb{R} , Ω_0 sea la componente de $\Omega_1 \cap \Omega_1^s$ que contiene al punto z_0 .

Una aplicación de este lema a Hayman-Wu es la siguiente

Lema R2 Sea Ω simplemente conexo con frontera suave; sea L una recta genérica y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ conforme. Sea $\Gamma = f(L) \subset \mathbb{D}$. Entonces, existen (en número finito) arcos disjuntos $A_n \subset \partial\mathbb{D}$ y una parametrización

$$\eta : A = \cup A_n \rightarrow \Gamma$$

con

$$\frac{1 - |\eta(\xi)|^2}{|\xi - \eta(\xi)|^2} \geq (2 + k_{\mathbb{D}}(\eta(\xi), \Gamma)) \frac{|\eta'(\xi)|}{1 - |\eta'(\xi)|^2} \quad (2.2)$$

Obsérvese que (2.2) implica que $|\eta'| \leq 2$ y como consecuencia $\Lambda(\Gamma) \leq 2 \cdot (2\pi) = 4\pi$; es decir, $C \leq 4\pi$.

La idea fundamental en la prueba de este lema consiste en asociar a cada conjunto de $\partial\mathbb{D}$ de longitud “pequeña”, ϵ , (de medida armónica ϵ) un intervalo de longitud hiperbólica “pequeña” (y que depende de ϵ) de la recta $\mathbb{R} \cap \Omega$; es decir, se construye una “función inversa” de la que explicamos que se construía en la prueba de Øyma. Tomando el límite en ϵ se consigue una función ψ definida en un cierto conjunto de la frontera de Ω , A_1 , sobre la recta $\mathbb{R} \cap \Omega$. Basta tomar $A = f(A_1)$ y $\Gamma = f \circ \psi \circ f^{-1}$.

Para terminar esta sección enunciamos un teorema, también debido a S. Rohde (1997) siguiendo el tipo de ideas mencionadas aquí, del que se puede deducir que $C \leq 2\pi^2$. El interés del teorema no radica en su aplicación a Hayman-Wu (ya se conocía la prueba de Øyma que daba una cota mejor) sino en sí mismo, ya que establece una sorprendente propiedad de subaditividad para las densidades hiperbólicas:

Teorema R3 Sean Ω_0, Ω_1 y $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ tres dominios simplemente conexos tales que $\partial\Omega_0 \subset \Omega_1^c \cup \Omega_2^c$. Entonces, para cualquier $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$,

$$\lambda_{\Omega_0}(z) \leq \lambda_{\Omega_1}(z) + \lambda_{\Omega_2}(z)$$

No vamos a dar la prueba aquí, simplemente diremos que el resultado es una consecuencia directa de la propiedad de subaditividad de la capacidad logarítmica. Sí vamos a ver, sin embargo, como deducir de este teorema que $C \leq 2\pi^2$.

Sea Ω_b el dominio definido en [FHM] como sigue: si

- $a = \inf \{z : z \in \mathbb{R} \cap \Omega\}$ $b = \sup \{z : z \in \mathbb{R} \cap \Omega\}$, y
- $E = (-\infty, a) \cup \partial\Omega \cup (b, \infty)$,

consideramos el conjunto

$$\tilde{E} = \{x + iy : x + iy \in E\}$$

y tomamos como Ω_b es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \tilde{E}$ que contiene al semiplano superior.

Tomamos $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = \Omega_b$ y $\Omega_2 = \bar{\Omega}_b$; por el Teorema R3, dada cualquier función decreciente $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ y dado cualquier punto $w \in \Omega$:

$$\int_{\mathbb{R} \cap \Omega} \psi(d_\Omega(w, s)) ds_\Omega \leq 2 \int_{\mathbb{R} \cap \Omega_b} \psi(d_{\Omega_b}(w, s)) ds_{\Omega_b},$$

donde ds_Ω denota el elemento de arco hiperbólico en Ω .

Para obtener finalmente la cota de una manera directa, tomamos como cierta la siguiente afirmación que será probada de forma rigurosa en la próxima sección (Lema 5): si γ es una curva en \mathbb{D}

$$\Lambda(\gamma) = \int_\gamma \psi_0(d_{\mathbb{D}}(0, s)) ds_{\mathbb{D}}$$

para una determinada función decreciente ψ_0 .

Con esto, consideramos las funciones de Riemann F_1, F_2 de Ω y Ω_b respectivamente sobre \mathbb{D} , y tales que $F_i^{-1}(0) = w$. Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda(F_1(\mathbb{R} \cap \Omega)) &= \int_{F_1(\mathbb{R} \cap \Omega)} \psi_0(d_{\mathbb{D}}(0, s)) ds_{\mathbb{D}} \\ &= \int_{(\mathbb{R} \cap \Omega)} \psi_0(d_{\Omega}(w, s)) ds_{\Omega} \\ &\leq \int_{(\mathbb{R} \cap \Omega_b)} \psi_0(d_{\Omega_b}(w, s)) ds_{\Omega_b} \\ &= \Lambda(F_2(\mathbb{R} \cap \Omega_b)) \leq 2\pi^2, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\mathbb{R} \cap \Omega_b \subset \Omega_b$ y la constante de Hayman-Wu óptima en este caso es π^2 (ver página 34).

2.2 La Constante de Hayman-Wu para dominios convexos.

En esta sección mostramos que el Teorema de Hayman-Wu es en realidad un resultado de geometría hiperbólica. También enunciamos el teorema principal de este capítulo, Teorema 3, y lo usamos para estimar la constante óptima de Hayman-Wu en dominios convexos, Teorema 4. La prueba del Teorema 3 será pospuesta hasta §2.3.1.

2.2.1 El Teorema de Hayman-Wu, un resultado de geometría hiperbólica

Como vimos en la sección anterior, el Teorema 2 relacionaba el problema de aplicaciones conformes de Hayman-Wu con un funcional, $I(\Omega, L)$.

Ahora vemos que el Teorema de Hayman y Wu es en realidad un enunciado de geometría hiperbólica.

Lema 5 *Sea Ω un dominio simplemente conexo en \mathbb{C} distinto del propio \mathbb{C} , sea a un punto en Ω , y sea γ una curva en Ω parametrizada por longitud de arco. Entonces, para cualquier aplicación conforme f de Ω sobre \mathbb{D} con $f(a) = 0$,*

$$\Lambda(f(\gamma)) = \int_{\gamma} \frac{1}{2 \cosh^2\left(\frac{1}{2}d_{\Omega}(a, s)\right)} \lambda_{\Omega}(s) |ds| \quad (2.3)$$

Demostración. Recuerdese que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(0, \omega) &= \log \frac{1 + |\omega|}{1 - |\omega|} \\ \lambda_{\Omega}(s) &= |f'(s)| \lambda_{\mathbb{D}}(f(s)) \\ d_{\Omega}(a, s) &= d_{\mathbb{D}}(0, f(s)), \end{aligned} \tag{2.4}$$

y por tanto

$$\Lambda(f(\gamma)) = \int_{\gamma} |f'(s)| |ds| = \int_{\gamma} \frac{1 - |f(s)|^2}{2} \frac{2|f'(s)|}{1 - |f(s)|^2} |ds|.$$

Para escribir el integrando en términos de la distancia hiperbólica, nótese que si $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - |z|^2} &= \frac{1}{(1 - |z|)(1 + |z|)} = \frac{\frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)} + \frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)}}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{d_{\mathbb{D}}(0, z)} + e^{-d_{\mathbb{D}}(0, z)} + 2}{4} = \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0, z) \right), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \Lambda(f(\gamma)) &= \int_{\gamma} \frac{1}{2 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0, f(s)) \right)} \lambda_{\Omega}(s) |ds| \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{2 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\Omega}(a, s) \right)} \lambda_{\Omega}(s) |ds| \end{aligned}$$

□

Observaciones: como consecuencia de la invarianza conforme

$$(i) \quad \int_{\gamma} \frac{1}{2 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\Omega}(a, s) \right)} \lambda_{\Omega}(s) |ds| = \int_{f(\gamma)} \frac{1}{2 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0, s) \right)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) |ds|$$

$$(ii) \quad \frac{\Lambda(f(\gamma))}{2} = \int_{f(\gamma)} \frac{1}{4 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0, s) \right)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) |ds| \leq \int_{\gamma} e^{-d_{\mathbb{D}}(0, s)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) |ds|$$

La observación 2 y la invarianza conforme prueban que la parte 2 del Teorema 2 implica (2.1), página 34, con $C = 4\pi$.

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 3 *Sea $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ una curva en \mathbb{D} y asúmase que el valor absoluto de la curvatura hiperbólica de γ está superiormente acotado por 1, entonces*

$$\int_{\gamma} e^{-d_{\mathbb{D}}(p,s)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) |ds| < \pi \quad (2.5)$$

La cota π es óptima (obsérvese que la desigualdad es estricta).

De hecho, para cada horociclo H y para cualquier $A > \frac{1}{2}$ un sencillo cálculo prueba que

$$\int_H e^{-Ad_{\mathbb{D}}(p,s)} \lambda_{\mathbb{D}}(s) |ds| \leq C(H) < \infty.$$

El Teorema de Estiramiento de Curvas que veremos en la sección §2.3 nos permitirá concluir que esta cota es cierta para cada curva γ de la forma descrita en el Teorema 3 anterior. Sin embargo, si $A \in (0, \frac{1}{2}]$ la integral es infinita para cualquier horociclo H .

Una consecuencia inmediata del Teorema 3 y de la observación (ii) bajo el Lema 5 es el siguiente resultado, el cual nos da la estimación óptima de la constante para el Teorema de Hayman y Wu en el caso de dominios convexos:

Teorema 4 *Sea Ω un dominio convexo en \mathbb{C} que no sea el propio plano, sea L una línea recta y sea f una aplicación conforme cualquiera de Ω sobre \mathbb{D} , entonces:*

$$\Lambda(f(\Omega \cap L)) < 2\pi \quad (2.6)$$

La cota 2π es la mejor posible y no se alcanza nunca. Para ver que no puede ser mejorada simplemente tomar un semiplano como dominio Ω y líneas paralelas a $\partial\Omega$. (Véase la Figura 21.)

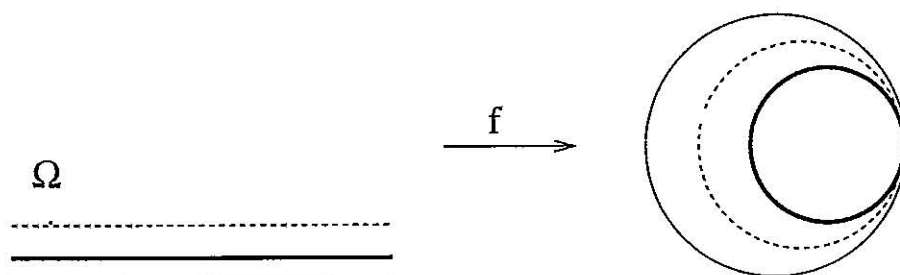


Figura 21

El Teorema 4 nos dice que la “constante de Hayman-Wu” para dominios convexos es 2π .

Es importante señalar que Beurling probó un resultado más fuerte que el del Teorema 4 que enunciamos a continuación:

Teorema B Si Ω , L son como en el Teorema 4, y g es una función holomorfa cualquiera en Ω , entonces

$$\int_L |g(z)|^2 |dz| \leq \int_{\partial\Omega} |g(z)|^2 |dz|$$

Este resultado aparece en la obra completa de A. Beurling [B, pág. 457] y se derivó de un intento de resolver el problema de Gabriel (para más detalles sobre éste véase la segunda parte de la memoria). El Teorema 4 es un caso particular del Teorema de Beurling; simplemente aplicamos éste a la función $g = (f')^{\frac{1}{2}}$, donde f es una aplicación conforme cualquiera de Ω sobre \mathbb{D} . El interés de la prueba que damos aquí está sobre todo en su conexión con la geometría hiperbólica.

2.3 Teorema de Estiramiento de Curvas (TEC)

Este teorema es una pieza clave en la prueba del Teorema 3. En esta sección solamente lo enunciamos y en la subsección §2.3.1 vemos cómo deducimos el Teorema 3 a partir de él; la prueba, artesana, la daremos en la siguiente sección.

Teorema 5 (Teorema de Estiramiento de Curvas (TEC): Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ una curva parametrizada por longitud de arco y supóngase que el valor absoluto de su curvatura está superiormente acotado por una constante fija b . Si $b > 1$ asúmase además que su longitud hiperbólica es menor que $\frac{\pi}{\sqrt{b^2 - 1}}$ (véase §2.1.4). Denotemos por d a la distancia del origen a la curva γ . Entonces,

$$d_{\mathbb{D}}(0, \gamma(s)) \geq C(s, b, d), \quad (2.7)$$

donde la cota $C(s, b, d)$ se alcanza sobre una curva H_b de curvatura hiperbólica constante b .

De forma más precisa, si $b = 1$ y z_0 es el punto en γ que está más cerca de 0, y $d = d_{\mathbb{D}}(0, z_0)$, entonces

$$d_{\mathbb{D}}(0, \gamma(s)) \geq d_{\mathbb{D}}(0, H(s)) \left(= \log \frac{1 + c(s)}{1 - c(s)} \right),$$

donde H es el horociclo en \mathbb{D} tangente a γ en z_0 con $H(0) = z_0$ que rodea al 0, y la función $c(s)$ viene dada por

$$c(s) = \sqrt{1 - \frac{4e^d}{s^2 + (e^d + 1)^2}}$$

Obsérvese lo siguiente:

- (a) En el disco de Poincaré, las curvas de curvatura constante b , con $-1 \leq b \leq 1$, son arcos de círculos euclídeos que intersecan el círculo unidad con un ángulo cuyo coseno es b , por lo tanto no son cerradas (véase §1.1.4 del capítulo anterior para más detalles). Obsérvese que (2.7) es cierto para todo s (recuérdese que en el plano euclídeo la restricción sobre la longitud era necesaria para evitar que las curvas se cerrasen sobre sí mismas, página 13).
- (b) El punto 0 no juega ningún papel especial, se puede sustituir por cualquier otro punto $p \in \mathbb{D}$.

Para nuestras aplicaciones sólo necesitamos el caso $b = 1$ y damos la prueba sólo para este caso; la prueba para los otros b 's es básicamente la misma con algunas modificaciones obvias (véase §1.1.5B).

La prueba del TEC la daremos después, en la sección §2.4. Tomamos por válido el Teorema de Estiramiento de Curvas y procedemos a deducir a partir de él el Teorema 3 en la siguiente subsección.

2.3.1 Prueba del Teorema 3

La prueba consta de dos pasos: en el primero vemos cómo el problema se puede reducir al caso de curvas de curvatura constante 1 (horociclos), y en el segundo estimamos la integral (2.5) para horociclos.

PASO 1: REDUCCIÓN A CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE

Denotamos por $z_0 \in \mathbb{D}$ a uno de los puntos en γ más cercanos a 0, es decir, el punto $z_0 \in \gamma$ satisface que $d_{\mathbb{D}}(0, \gamma(s)) \geq d_{\mathbb{D}}(0, z_0)$ para cada tiempo s . Sea H un horociclo en \mathbb{D} tangente a γ en el punto z_0 , que rodea a 0, y cuya curvatura hiperbólica es +1.

El Teorema de Estiramiento de Curvas asegura que

$$\int_{\gamma} e^{-d_{\mathbb{D}}(0,w)} \lambda_{\mathbb{D}}(w) |dw| \leq \int_H e^{-d_{\mathbb{D}}(0,z)} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz|.$$

Dicho de otra manera, podemos asumir que γ es un horociclo.

PASO 2: CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE

Resulta más conveniente a la hora de hacer cálculos, usar el modelo del semiplano superior que el del disco de Poincaré. Por tanto, consideramos una curva $\gamma^{\mathbb{H}}$ en \mathbb{H} cuya curvatura está acotada en valor absoluto por 1 y probamos que

$$\int_{\gamma^{\mathbb{H}}} e^{-d_{\mathbb{H}}(z,s)} \lambda_{\mathbb{H}}(s) |ds| < \pi. \quad (2.8)$$

Queremos estimar

$$B = \sup_H \int_H e^{-d_{\mathbb{H}}(0,z)} \lambda_{\mathbb{H}}(z) |dz|,$$

donde tomamos el supremo sobre todos los horociclos H de \mathbb{H} . Una expresión más conveniente para B , que se obtiene mediante una transformación conforme, es:

$$B = \sup_{a>0} \int_{\gamma_0^{\mathbb{H}}} e^{-d_{\mathbb{H}}(ia,s)} ds, \quad (2.9)$$

donde $\gamma_0 = \{z \in \mathbb{H} : \Im z = 1\}$ está parametrizada por longitud de arco, es decir, $\gamma_0(s) = s + i$.

En el resto de esta subsección estaremos en \mathbb{H} , todas las curvas y distancias se referirán a \mathbb{H} . Para facilitar la lectura, no escribiremos el índice

\mathbb{H} cuando nos referiramos a objetos que estén en el semiplano sin que esto deba dar lugar a confusión alguna. Así, escribimos γ por $\gamma^{\mathbb{H}}$ y d por $d_{\mathbb{H}}$.

Para estimar (2.9) definimos la función Ψ en \mathbb{R}^+ como

$$\Psi(a) = \int_{\gamma_0} e^{-d(ia, s)} ds,$$

y observamos que definiendo

$$f(s, a) = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{s^2 + (a-1)^2}{s^2 + (a+1)^2}}}{1 + \sqrt{\frac{s^2 + (a-1)^2}{s^2 + (a+1)^2}}} \right),$$

entonces

$$\Psi(a) = 2 \int_0^\infty f(s, a) ds$$

(recuérdese que en \mathbb{H} la distancia hiperbólica entre los puntos $s+i$ y ai está dada mediante la relación $d(s, a) = \log f(s, a)$.)

Si $a < 1$ $\Psi(a)$ es creciente, ya que si $a_1 < a_2 < 1$ entonces $d(a_1 i, s+i) > d(a_2 i, s+i)$ lo cual implica que $\Psi(a_1) < \Psi(a_2)$. Así,

$$\sup_{\{1 > a > 0\}} \Psi(a) = \Psi(1) = 8/3$$

Si $a \geq 1$,

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= 2 \int_0^\infty f(s, a) ds = 2 \int_0^{\frac{1}{a}} |\{s > 0 : f(s, a) > t\}| dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{(a-t)(1-at)}{t}} dt = 4 \int_0^1 \sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})(1-x^2)} dx, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del hecho de que $f(s, a) \leq \frac{1}{a}$ para todo s positivo, y la última del cambio de variables $x^2 = at^{-1}$.

El integrando de la última expresión está uniformemente acotado y es creciente en a , por tanto

$$\sup_{a > 1} \Psi(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} 4 \int_0^1 \sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})(1-x^2)} dx = \pi,$$

y se concluye que $B = \max \left\{ \frac{8}{3}, \pi \right\} = \pi$.

2.4 Prueba del Teorema de Estiramiento de Curvas

Hemos visto como el Teorema 3 es una consecuencia inmediata del TEC. Damos a continuación la prueba del resultado principal de este capítulo, el Teorema de Estiramiento de Curvas, que estructuramos como sigue: primero damos una versión discreta o poligonal del TEC, y después seguimos un método de aproximación que nos permite derivar el resultado general a partir de ésta (estructura ya seguida en la prueba del Teorema de Schur euclídeo, página 24).

2.4.1 Versión poligonal del TEC

En esta subsección describimos una versión poligonal discreta, Teorema 6, del TEC. Como se podrá observar, la versión poligonal dada para curvas en el plano euclídeo guarda un cierto paralelismo con ésta.

Antes de enunciar el teorema, cierta notación es necesaria: fijamos un punto z_0 en \mathbb{D} que nos servirá como punto de referencia, como en el caso euclídeo (sección §1.2.1), denotamos por $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ a una curva poligonal parametrizada por longitud de arco (hiperbólica), consistente en un número determinado de segmentos geodésicos, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, de igual longitud L llamados *lados*, que conectan *vértices* $z_0 = p_0, p_1, \dots, p_n$, esto es

$$\begin{aligned} p_0 &= z_0 &= \gamma_1(0) \\ p_i &= \gamma_i(L) &= \gamma_{i+1}(0), \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ p_n &= \gamma_n(L) \end{aligned}$$

y tales que los ángulos θ_i son ángulos entre segmentos consecutivos, esto es

$$\theta_i = \angle(\gamma'_i(L), \gamma'_{i+1}(0)) \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1.$$

Recuérdese la sección §1.1.3.

Observamos que $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ queda determinada de forma única a partir de los datos dados, es decir, los ángulos y la longitud L , salvo por rotación alrededor de z_0 . Observamos también que cada vértice p_k está dado en términos de la parametrización global de la curva poligonal por $p_k = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(kL)$, y que la longitud de la curva poligonal es nL . Con la notación introducida en §1.1.3 la curva poligonal se puede escribir como

$$P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)} = \bigcup_{k=0}^{n-1} [p_k, p_{k+1}]$$

Un ejemplo particularmente importante de curva poligonal es $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ donde β y L se relacionan por la ecuación

$$\beta = 2 \arctan \left(\sinh \frac{L}{2} \right). \quad (2.10)$$

En este caso los vértices están todos en el mismo horociclo (véase §1.1.4).

En el resto de esta sección, L y β permanecen fijos y relacionados como en la expresión de arriba (2.10).

Recordamos que ángulo “positivo” significa girar en un sentido, y “negativo” en el contrario; ángulo “más grande” significa girar más.

La versión discreta del TEC establece:

Teorema 6 (TEC Poligonal) Sean $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ y $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ dos curvas poligonales con

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(0) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(0) = z_0, \\ P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(L) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(L). \end{aligned}$$

Si $|\alpha_k| \leq \beta$ para todo k , entonces

$$d(z_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(z_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)) \quad (2.11)$$

Observaciones:

- El Teorema 6 también sería cierto si β fuese la función de expresión complicada de L, β de §1.1.4, donde L y β están relacionadas de manera que $\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\beta}{L} = b$, $b \neq 1$, haciendo las modificaciones obvias (véase §1.1.5B).
- El punto z_0 , desde el cual medimos las distancias, pertenece a las poligonales.

La idea de la prueba es la siguiente:

Consideramos una poligonal que empieza en, digamos, el origen. Intuitivamente está claro que si la poligonal gira siempre hacia el mismo lado, cuanto más gire más cerca queda del origen. Sin embargo, si permitimos girar en ambos sentidos, ya no resulta tan obvio cuál va a ser la que se quede más cerca, y es aquí donde realmente radica la dificultad de la prueba. Para

salvarla, parece natural intentar convertir todos los giros en positivos y ver que, sin variar el tamaño de los giros, ésta es la mejor situación.

Para esto bastaría ver que si uno de los giros negativos lo cambiamos por uno positivo (del mismo tamaño), nos acercamos al origen. Esto es precisamente lo que vamos a probar: vamos a comparar dos curvas poligonales que difieran sólo en el sentido de giro de un ángulo (o varios si hay otros consecutivos del mismo signo) y vamos a ver que la que tiene ese giro positivo queda más cerca del origen.

Observamos que el problema queda ahora reducido a comparar dos triángulos; la ley del coseno va a ser una herramienta fundamental. Para aplicarla convenientemente vamos a necesitar determinar la región en la que pueden estar ciertos vértices en función de los demás vértices de la poligonal y de los ángulos de giro.

Para preparar la prueba daremos unos cuantos lemas sencillos que determinarán precisamente esta región. Después comenzaremos la prueba siguiendo la estructura de dificultad creciente anunciada arriba.

Lema 6 Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2^*$ tres segmentos geodésicos en \mathbb{D} con longitudes l_1, l_2 y l_2^* respectivamente. Supóngase que $l_2 \leq l_2^*$ y que $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0) = \gamma_2^*(0)$. Denótese por a y a^* los ángulos interiores

$$a = \angle(\gamma_2'(0), -\gamma_1'(l_1)) \quad a^* = \angle((\gamma_2^*)'(0), -\gamma_1'(l_1))$$

y asúmase que $0 < a < a^* < \pi$.

Entonces

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) < d(\gamma_1(0), \gamma_2^*(l_2^*))$$

Obsérvense los signos negativos en la definición de los ángulos dada arriba. El Lema 6 es simplemente la ley del coseno en \mathbb{D} escrita de forma conveniente para nosotros; de hecho, (véase §1.1.3)

$$\begin{aligned} \cosh[d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))] &= \cosh l_1 \cosh l_2 - \sinh l_1 \sinh l_2 \cos a \\ &\leq \cosh l_1 \cosh l_2 - \sinh l_1 \sinh l_2 \cos a^* \\ &= \cosh[d(\gamma_1(0), \gamma_2^*(l_2^*))] \end{aligned}$$

Notamos que con las hipótesis sobre las longitudes de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2^*$ también es cierto que

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) < d(\gamma_1(0), \gamma_2^*(l_2^*)) \text{ implica que } a < a^*$$

Para los lemas que procedemos a enunciar, conviene recordar la definición de $U(p, q)$ para dos puntos cualesquiera $p, q \in \mathbb{D}$ (véase §1.1.5A), y la notación $p_i = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(iL)$.

En el Lema siguiente imponemos condiciones en el tamaño de los ángulos y obtenemos conclusiones sobre las posiciones, relativas a los dos primeros vértices, de todos los demás:

Lema 7 *Sea $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ una curva poligonal en \mathbb{D} que verifica: $|\theta_k| \leq \beta$ para todo k .*

Entonces $p_k \in U(p_0, p_1)$ para todo $k = 2, 4, \dots, n$

Demostración. Recuérdesse el Lema relativo a la invarianza de los paraguas $U(p, q)$ (§1.1.5A). El Lema 7 se sigue de un argumento de inducción en el número de vértices. \square

Se puede probar un resultado en esta misma línea más general que el del Lema 7. Para ello es necesario recordar la definición de los paraguas especiales $U(c, d; 1, n)$ dada en §1.1.5C. El lema que viene a continuación nos permitirá obtener conclusiones sobre las posiciones, relativas a los dos primeros vértices, de todos los demás de una manera bastante más precisa que el anterior. Observamos que es irrelevante para el resto de la prueba del Teorema 6, sin embargo será clave en la prueba del TEC (ver página 62).

Lema 7' *Sea $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ una curva poligonal en \mathbb{D} tal que $|\theta_k| \leq \beta$. Entonces $p_k \in U(p_0, p_1; 1, n)$ para todo $k = 2, \dots, n$.*

Demostración. Como en la prueba del Lema 7, recuérdese la propiedad de invarianza de $U(p_0, p_1; 1, n)$. Por inducción en el número de vértices obtenemos el lema. \square

El siguiente lema es un resultado de comparación de ángulos de ciertos triángulos. Es el lema clave en la prueba del Teorema 6. Necesitamos considerar el cuadrante Ω de \mathbb{D} dado por $\Omega = \{z \in \mathbb{D} : \pi/2 \leq \arg z \leq \pi\}$,

Lema 8 Sea $z \in \mathbb{D}$ con $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, y sea $z_0 \in \Omega$.

Sean T y T^* dos triángulos dados por segmentos geodésicos $T = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ con longitudes l_0, l_1, l_2 y $T^* = (\gamma_0, \overline{\gamma_1}, \gamma_2^*)$ con longitudes l_0, l_1, l_2^* , tales que $\gamma_0(0) = z_0$, $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_2(0) = z$. Sea

$$b = \angle(\gamma_2'(0), -\gamma_1'(l_1)) \quad \text{y} \quad b^* = \angle((\gamma_2^*)'(0), -\overline{\gamma_1}'(l_1))$$

Entonces,

$$b \geq b^* \quad (2.12)$$

La notación $\overline{\gamma_1}$ denota la geodésica $\overline{\gamma_1}(t) = \overline{\gamma_1(t)}$. Obsérvese que el tercer vértice del triángulo T^* es \bar{z} .

Demostración. Consideramos primero los ángulos b y b^* como funciones del punto z_0 y mantenemos los otros puntos 0 , z y \bar{z} fijos.

Definimos dos subconjuntos Ω_1 y Ω_2 del cuadrante Ω como sigue:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{z \in \mathbb{D} : \pi/2 \leq \arg z \leq \pi - \theta\} \\ \Omega_2 &= \{z \in \mathbb{D} : \pi - \theta \leq \arg z \leq \pi\} \end{aligned}$$

Verificamos (2.12) sólo cuando $z_0 \in \Omega_1$; el argumento para el caso $z_0 \in \Omega_2$ es exactamente el mismo.

Los ángulos b y b^* son funciones armónicas de z_0 en Ω_1 , y por tanto, por el principio del máximo, basta probar (2.12) para $z_0 \in \partial\Omega_1$.

La frontera de Ω_1 está formada por tres lados y tratamos cada uno de ellos por separado, es decir, consideramos los casos:

$$\begin{aligned} (a) \quad z_0 &= re^{i(\pi-\theta)} \\ (b) \quad z_0 &= re^{i\pi/2} \\ (c) \quad z_0 &= e^{i\xi} \quad \pi/2 \leq \xi \leq \pi - \theta \end{aligned}$$

En el caso (a), $b^* = 0$ y $b > 0$.

En el caso (b), la desigualdad $b \geq b^*$ se sigue directamente de la ley del seno. Para ver esto denotamos por

$$a = \angle(\gamma_1'(0), -\gamma_0'(l_0)) \quad \text{y} \quad a^* = \angle((\overline{\gamma_1})'(0), -\gamma_0'(l_0))$$

y observamos que $a^* = \pi - a$ (recuérdese que estamos en el caso (b)) y que $b^* < \pi/2$. If $b > \pi/2$ ya tenemos (2.12); si no, usando la regla del seno dos veces para comparar $\sin b$ y $\sin b^*$ (véase §1.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin a \frac{\sinh l_2^*}{\sinh l_0} \\ &= \sin a^* \frac{\sinh l_2^*}{\sinh l_0} \\ &\geq \sin a^* \frac{\sinh l_2}{\sinh l_0} = \sin b^* \end{aligned}$$

y por tanto $b \geq b^*$.

En el caso (c) cambiamos el punto de vista; fijamos el punto z_0 , ($z_0 = e^{i\xi}$ $\pi/2 \leq \xi \leq \pi - \theta$), fijamos los arcos

$$\begin{aligned} I &= \{e^{i\eta} : \xi \leq \eta \leq \pi + \theta\} \\ J &= \{e^{i\eta} : \pi + \theta \leq \eta \leq 2\pi - \xi\}, \end{aligned}$$

y consideramos las medidas armónicas en \mathbb{D}

$$\begin{aligned} \omega_I(w) &= \omega(w, I, \mathbb{D}) \\ \omega_J(w) &= \omega(w, J, \mathbb{D}). \end{aligned}$$

Observamos que $\omega_I(z) = \frac{b}{\pi}$ y $\omega_J(z) = \omega(\overline{z}, \overline{J}, \mathbb{D}) = \frac{b^*}{\pi}$.

Se ha reducido el problema a comprobar que $\omega_I(z) \geq \omega_J(z)$; vamos a probar el hecho más general que establece que

$$\omega_I(w) \geq \omega_J(w) \quad \text{para todo } w \in \mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H} \quad (2.13)$$

De nuevo verificamos (2.13) usando el principio del máximo.

- Para $w \in (-1, 1)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\omega_I(w) &= \omega(w, \bar{J}, \mathbb{D}) + \omega(w, I \setminus \bar{J}, \mathbb{D}) \\ &= \omega(w, J, \mathbb{D}) + \omega(w, I \setminus \bar{J}, \mathbb{D}) \\ &\geq \omega_J(w)\end{aligned}$$

- para $w \in \partial\mathbb{D}^+ \setminus (-1, 1)$, $\omega_J(w) = 0$.

□

Para los lemas que siguen, es conveniente tener una notación x_L para el punto situado en el radio de 0 a 1 cuya distancia hiperbólica a 0 es $\frac{L}{2}$, es decir

$$x_L = \tanh \frac{L}{4}.$$

También denotamos por $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ by \mathbb{D}^+ y tomamos por $U(p, q)$ el paraguas $U(-x_L, x_L)$.

Procedemos a establecer unos cuantos lemas sobre curvas poligonales. El primero de ellos es un resultado sobre cuñas, pero preferimos considerarlas como curvas poligonales de dos lados solamente.

Lema 9 Sea $P_{(\theta_1, L)}$ una curva poligonal en \mathbb{D} tal que

- (a) p_0 y p_1 están en $U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+$
- (b) $0 \leq \theta_1 \leq \beta$ (recuérdese la notación de §1.1.3).

Entonces

$$p_2 \in U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+$$

Demostración. Por el Lema 7 tenemos que $p_2 \in U(-x_L, x_L)$. Para terminar la prueba basta mostrar que $\arg(p_2) \in [0, \pi) \bmod 2\pi$; pero observamos que, en el peor caso (esto es $p_0, p_1 \in (-1, 1)$), $\arg(p_2) = \theta_1 > 0$, y esto quiere decir que $\arg p_2 = \theta_1 \in [0, \pi)$ (recuérdese §1.1.3).

□

Recuérdese la definición de $H_{p,q}$ (§1.1.5A) y la definición de Ω , $\Omega = \{z \in \mathbb{D} : \pi/2 \leq \arg z \leq \pi\}$. En lo que sigue a continuación y a lo largo de toda la prueba del Teorema 6, denotamos por $V(-x_L, x_L)^+$ el cierre de la componente de $\Omega \setminus (H_{-x_L, x_L} \cap \mathbb{D}^+)$ que contiene al punto -1 en su frontera.

Una vez más, recuérdese la notación $p_k = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(kL)$ para todo $k = 0, \dots, n$.

El siguiente es un resultado sobre curvas poligonales cuyos ángulos son todos positivos:

Lema 10 *Sea z_0 un punto en $V(-x_L, x_L)^+$. Sea $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$ una curva poligonal tal que $0 \leq \theta_k \leq \beta$ para todo k , y*

$$p_0 = -x_L \quad ; \quad p_1 = x_L$$

(es decir, el primer segmento de la curva poligonal está sobre la geodésica $(-1, 1)$). Entonces

- (a) $p_k \in U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+$, para todo $k = 2, \dots, n$
- (b) $d_{\mathbb{D}}(z_0, p_n) \leq d_{\mathbb{D}}(z_0, \overline{p_n})$.

Obsérvese que lo siguiente también sucede: sea $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$, $0 \leq \theta_k \leq \beta$, tal que $p_{n-1} = -x_L$ y $p_n = x_L$, entonces $p_k \in V(-x_L, x_L)^+$, para todo $k = 0, \dots, n-2$ (simplemente consideramos la curva poligonal recorrida en sentido contrario y argumentamos por simetría; esto es, consideramos la nueva curva poligonal $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ donde $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(iL) = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}((i-1)L)$).

Demostración.

(a) Los puntos p_0, p_1, p_2 están en la situación del Lema 9, así pues $p_2 \in U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+$. Ahora repetimos el argumento con los puntos p_1, p_2, p_3 ; el resultado se obtiene por recursión.

(b) El resultado es ahora trivial porque $p_n \in \mathbb{D}^+$. \square

Una vez establecidos estos lemas procedemos a dar la prueba del Teorema 6, y lo hacemos en cuatro pasos de creciente generalidad.

PASO I: Consideramos dos curvas poligonales con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} P &= P(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_i|, \dots, |\alpha_j|, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-1}; L) \\ Q &= P(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_i|, -|\alpha_{i+1}|, \dots, -|\alpha_j|, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{n-1}; L) \end{aligned}$$

con $|\alpha_k| \leq \beta$.

Esto es, tenemos $1 \leq i < j \leq n$, y las curvas poligonales tienen los mismos ángulos positivos $|\alpha_k|$ for $1 \leq k \leq i$, los mismos ángulos α_k (sin restricción alguna de signo) para $j < k \leq n-1$, y los ángulos para $i < k \leq j$ son positivos para la primera poligonal, negativos para la segunda e iguales en valor absoluto.

Queremos probar que

$$d_{\mathbb{D}}(z_0, P(nL)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_0, Q(nL)). \quad (2.14)$$

Sea, para cada k , $0 \leq k \leq n-1$,

$$z_k = P(kL) \quad w_k = Q(kL)$$

Recordamos que ambas curvas poligonales empiezan en el mismo punto z_0 , y por tanto $w_0 = z_0$. Notamos que $d(z_j, z_n) = d(w_j, w_n)$ y $d(z_i, z_j) = d(z_i, w_j)$.

Reducimos la comparación de (2.14) entre las curvas poligonales a una comparación entre los triángulos dados por los segmentos geodésicos

$$[z_0, z_i] \cup [z_i, z_j] \cup [z_j, z_n] \quad \text{y} \quad [z_0, z_i] \cup [z_i, w_j] \cup [w_j, w_n]$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el segmento $[z_{i-1}, z_i]$ está sobre la geodésica $(-1, 1)$ con $z_i = x_L$ y $z_{i-1} = -x_L$. Observamos que, debido a que el segmento $[z_{i-1}, z_i]$ coincide con $[w_{i-1}, w_i]$, tenemos que

1. $z_j \in U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+$, porque $0 \leq \alpha_k \leq \beta$ para cada k , $i < k \leq j$ (por el Lema 10).
2. $w_j = \overline{z_j}$ porque $|\alpha_k| = -\alpha_k$ para $i < k \leq j$, por hipótesis (ver la estructura especial que tienen estas curvas poligonales) y ambas curvas poligonales tienen los lados de la misma longitud.
3. z_0 está en $V(-x_L, x_L)^+$ por la observación hecha justo después del Lema 10 (los ángulos iniciales $|\alpha_k|$ para k , $1 \leq k < i$ son todos positivos).

Para terminar la prueba de (2.14) notamos que:

- $\pi - |\angle[z_0, z_i], [z_i, z_j]| \leq \pi - |\angle[z_0, z_i], [z_i, w_j]|$. (Obsérvese que estamos comparando los ángulos interiores en el vértice z_i de los triángulos cuyos vértices son z_0, z_i, z_j y z_0, z_i, w_j respectivamente.)
- Por el Lema 8 tenemos que

$$\pi - |\angle[z_i, z_j], [z_j, z_0]| \geq \pi - |\angle[z_i, w_j], [w_j, w_0]|.$$

(Obsérvese que aquí comparamos ángulos interiores de los triángulos obvios.) Por tanto, y debido a la especial forma de las curvas poligonales que estamos considerando,

$$\pi - |\angle[z_0, z_j], [z_j, z_n]| \leq \pi - |\angle[z_0, w_j], [w_j, w_n]| \quad (2.15)$$

- Como $\Im(z_0) > 0$ tenemos que $d(z_0, z_j) \leq d(z_0, w_j)$. Esto junto con (2.15) nos permite concluir que

$$d(z_0, z_n) \leq d(z_0, w_n),$$

como deseábamos.

PASO II: CURVAS POLIGONALES CON EL MISMO ÁNGULO EN VALOR ABSOLUTO. Consideramos dos curvas poligonales con la siguiente estructura

$$P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n-1}|; L)} \quad ; \quad P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}.$$

Queremos probar que

$$d_{\mathbb{D}}(z_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) \geq d_{\mathbb{D}}(z_0, P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n-1}|; L)}(nL)), \quad (2.16)$$

sin importar lo que valgan los ángulos α_i siempre y cuando satisfagan que $|\alpha_i| \leq \beta$. Observamos que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha_1 \geq 0$.

El argumento es iterativo:

Si para todo k tenemos $|\alpha_k| = \alpha_k$, no hay nada que probar; si no, sea $1 < i \leq n-1$ el primer entero tal que $|\alpha_i| = -\alpha_i$. Tenemos entonces $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)} = P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{i-1}|, -|\alpha_i|, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$, y por el paso I,

$$d(z_0, P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{i-1}|, -|\alpha_i|, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, L)}(nL)) \geq d(z_0, P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_i|, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, L)}(nL));$$

repetimos ahora el argumento con $P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_i|, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, L)}$ en lugar de $P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{i-1}|, -|\alpha_i|, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, L)}$ e iteramos.

PASO III: CURVAS POLIGONALES CON ÁNGULOS POSITIVOS. Consideramos curvas poligonales con la estructura siguiente:

$$P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)} \quad \text{y} \quad P_{(\beta, \dots, \beta; L)},$$

con la condición $0 \leq \theta_i \leq \beta$. Queremos probar que

$$d(z_0, P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(z_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)) \quad (2.17)$$

Argumentamos por inducción. Si $n = 2$, la desigualdad (2.17) se sigue directamente del Lema 6.

Para seguir el argumento debemos fijar cierta notación; sin pérdida de generalidad asumimos que

$$\begin{aligned} P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(0) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(0) = -x_L \\ P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(L) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(L) = x_L \end{aligned}$$

Entonces, $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(iL)$ está sobre el horociclo $H_{-x_L, x_L} \cap \mathbb{D}^+$ para $i = 2, \dots, n-1$ (véase §1.1.4), y $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(iL)$ está en $U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+$ para todo i , $i = 2, \dots, n-1$ como consecuencia del Lema 10 y de la observación (1) en el paso I.

Pongamos $w = P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL) = re^{i\omega}$, donde ω es tal que $0 < \omega < \pi/2$, y $b_n = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(nL)$. Considérense las nuevas curvas poligonales

$$P_{(\theta_2, \dots, \theta_{n-1}; L)} \quad \text{y} \quad P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$$

(ambas con $n-1$ lados); por inducción

$$d(x_L, P_{(\theta_2, \dots, \theta_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(x_L, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL))$$

Para concluir finalmente (2.17) debemos considerar dos casos:

- (a) b_n está en la componente R de $(U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+) \setminus \{\text{la geodésica que pasa por } x_L \text{ y } w\}$ que contiene al punto 1 en su frontera. En este caso el Lema 6 da el resultado buscado.

- (b) b_n está en $(U(-x_L, x_L) \cap \mathbb{D}^+) \setminus R$, donde R está definida como en (a). Tomamos el punto intersección q de la geodésica que une x_L y b_n y $H_{-x_L, x_L} \cap \mathbb{D}^+$. Claramente,

$$d(-x_L, b_n) \geq d(-x_L, q).$$

Pero en un horociclo, la distancia a un punto fijo ($-x_L$ en nuestro caso), aumenta monótonamente cuando lo recorremos, así

$$d(-x_L, q) \geq d(-x_L, w)$$

y (2.17) se sigue.

PASO IV: CURVAS POLIGONALES GENERALES. Para terminar consideramos una curva poligonal cualquiera $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ con la única restricción de que sus ángulos α_k deben satisfacer $|\alpha_k| \leq \beta$ para todo k , $0 \leq k \leq n-1$, y la comparamos con la curva poligonal $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$.

Para probar que

$$d(z_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(z_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)),$$

simplemente debemos observar que

$$\begin{aligned} d(z_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) &\geq d(z_0, P_{(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n-1}|; L)}(nL)) \\ &\geq d(z_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)), \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue del paso II, mientras que la segunda del paso III.

Esto finaliza la prueba del Teorema 6.

2.4.2 Prueba del TEC

Consideramos una curva γ parametrizada por longitud de arco cuya curvatura es (en valor absoluto) estrictamente menor que 1 en cada punto, y probamos el resultado en este caso. El caso general se sigue de éste por aproximación.

Elegimos uno de los puntos z_0 sobre la curva γ más próximos a 0, es decir, $z_0 \in \gamma$ es tal que $d_{\mathbb{D}}(0, \gamma(s)) \geq d_{\mathbb{D}}(0, z_0)$, para cada s . Podemos asumir que γ está parametrizada de forma que $z_0 = \gamma(0)$.

Sea $H_1 = H$ el único horociclo parametrizado por longitud de arco tal que

$$H(0) = z_0 = \gamma(0) \quad \text{y} \quad H'(0) = \gamma'(0)$$

(su curvatura será constantemente igual a 0 o bien +1 o bien -1). Denotamos también por H_{-1} el otro horociclo tangente a γ en z_0 .

La prueba consta de dos pasos.

PASO 1: *Primero verificamos que*

$$d(z_0, \gamma(s)) \geq d(z_0, H(s)) \quad \text{para todo } s.$$

Para esto, fijamos s y fijamos también un paso pequeño L de la forma $L = \frac{s}{n}$, donde n es un entero positivo, y aproximamos el horociclo H y la curva dada γ por curvas poligonales $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$ y $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$ respectivamente de la siguiente forma:

para aproximar H tomamos $p_0 = z_0 \in H$ y determinamos puntos sucesivos $\{p_i\}_{i=1}^n$, $p_i \in H$, de manera que $d(p_i, p_{i+1}) = L$ para $i = 0, \dots, n-1$; obsérvese que los ángulos de la curva poligonal construida de esta manera son todos iguales a $\beta = 2 \arctan(\sinh L/2)$ (véase §1.1.4);

para aproximar γ tomamos $q_0 = z_0 \in \gamma$ y determinamos puntos sucesivos $\{q_i\}_{i=1}^n$, $q_i \in \gamma$, de manera que $d(q_i, q_{i+1}) = L$, para $i = 0, \dots, n-1$; obsérvese que los ángulos α_i de la curva poligonal construida de esta manera satisfacen $|\alpha_i| \leq \beta$ si L es suficientemente pequeño. Esto, por supuesto, se debe al hecho de que la curvatura de γ es estrictamente menor que 1 en valor absoluto (véase §1.1.4).

Por la versión poligonal de Teorema de Estiramiento de Curvas tenemos que

$$d(z_0, P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(nL)) \geq d(z_0, P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(nL)),$$

y si ahora hacemos $L \rightarrow 0$ deducimos de (2.14) que

$$d(z_0, \gamma(s)) \geq d(z_0, H(s))$$

PASO 2: Verificamos que

$$d(0, \gamma(s)) \geq d(0, H(s)) \quad \text{para todo } s. \quad (2.18)$$

La prueba, como veremos a continuación, se sigue fácilmente del Lema 7' (página 52), el paso 1 anterior, y la ley del coseno (véase §1.1.2).

Recuérdese la notación de $[p, q]$ para denotar el segmento geodésico que empieza en p y termina en q y considérense los triángulos

$$T_H = [0, z_0] \cup [z_0, H(s)] \cup [H(s), 0]$$

$$T_\gamma = [0, z_0] \cup [z_0, \gamma(s)] \cup [\gamma(s), 0],$$

y sean los ángulos interiores de estos triángulos

a_H = ángulo entre la geodésica que une 0 y z_0 y la geodésica que une z_0 y $H(s)$, y

a_γ = ángulo entre la geodésica que une 0 y z_0 y la geodésica que une z_0 y $\gamma(s)$ (ver figura siguiente).

(Recuérdese que estos ángulos son positivos.)

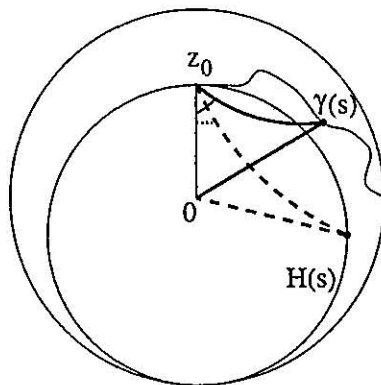


Figura 22

Por el paso 1, bastaría ver que $a_H \leq a_\gamma$ y la ley del coseno aplicada a los triángulos T_H y T_γ nos daría el resultado deseado, (2.18).

Veamos pues que $a_H \leq a_\gamma$. Para ello usaremos el Lema 7'; es necesario recordar la definición de los paraguas especiales $U(c, d; 1, n)$ (véase sección §1.1.5C), y la notación de H_{-1} para el otro horociclo tangente a γ en z_0 parametrizado de forma que $H_{-1}(0) = z_0$.

Sean z_0, γ y H como en el paso anterior; para cada s definimos el análogo de los paraguas especiales $U(c, d; 1, n)$ como la región del disco $U(z_0; s)$ indicada en la siguiente figura:

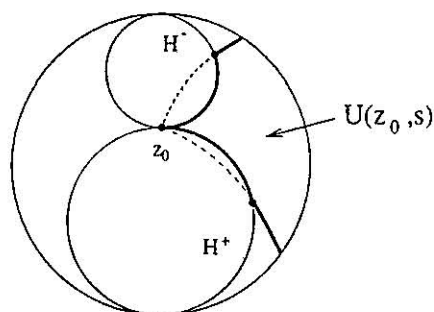


Figura 23

Para cada s , aproximando γ, H como en el paso anterior, y H_{-1} por la poligonal $P_{(-\beta, \dots, -\beta; L)}$; el Lema 7' (página 52) se reescribe de la siguiente manera:

Lema 7'' Sean γ, H, H_{-1} como arriba. Entonces

$$\gamma(s) \in U(z_0; s) \text{ para cada } s$$

Una consecuencia inmediata es que

$$a_H \leq a_\gamma,$$

y por tanto (2.18) queda probado y con ello el Teorema de Estiramiento de Curvas.

2.5 Un resultado de comparación para cuñas curvadas

Recuérdese que por una cuña entendemos la siguiente configuración: dos lados geodésicos de un triángulo y el ángulo entre ellos.

La ley del coseno (§1.1.3) nos permite comparar, en particular, los terceros lados de dos cuñas, cuyos lados sean iguales, en función del tamaño de los ángulos.

El Teorema de Estiramiento de Curvas, Teorema 5 (página 46), permite comparar triángulos rectángulos donde uno de los lados no tiene porqué ser una geodésica. Esto se ve mucho más claro si se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 5' *Dados dos puntos cualesquiera p y q en \mathbb{D} , y una curva γ tal que $p \in \gamma$, el ángulo en p con la geodésica que contiene a los puntos p y q es $\pi/2$, y la curvatura hiperbólica de γ está acotada en valor absoluto por 1, entonces*

$$d_{\mathbb{D}}(q, \gamma(s)) \geq c(s),$$

donde $c(s) = d_{\mathbb{D}}(q, H(s))$, para el mismo s , y para el horociclo H en \mathbb{D} , tangente a γ en p , con $H(0) = p$ y que rodea al punto q .

Los argumentos dados en la prueba del Teorema 6, especialmente los usados en las pruebas de los lemas 6-7' previos a la demostración, y la forma alternativa de enunciar el teorema 5 (Teorema 5') nos sugieren que quizá se pueda hablar de una ley del coseno más general, donde los lados de los triángulos no tienen por qué ser geodésicas.

Tanto el Teorema 5' como la ley del coseno son casos particulares de un resultado de comparación más general, Teorema 7, que enunciamos a continuación. En él consideramos dos curvas cualesquiera (ninguna de ellas tiene porqué ser geodésica) que se cortan formando un ángulo cualquiera, y cuyas curvaturas estén acotadas en valor absoluto por dos constantes (distintas o no) cualesquiera. Para ello necesitamos el concepto de *cuña curvada* y alguna notación.

Por una *cuña curvada* significamos la siguiente configuración: dos curvas $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathbb{D}$ con curvaturas hiperbólicas acotadas en valor absoluto por $a > 0$ y $b > 0$ respectivamente, y parametrizadas de manera que $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$, y el ángulo "interior" entre ellas en p , α .

En el resto de esta sección, γ y $\tilde{\gamma}$ serán como hemos dicho arriba.

El tipo de argumentos que se usarán en breve son similares a aquéllos usados en la sección §2.4

Para η pequeño, introducimos la siguiente notación (Figura 24):

H_γ^a = curva con curvatura constante a parametrizada de forma que $p = H_\gamma^a(0)$, tangente a γ en p , que rodea a los puntos $\tilde{\gamma}(s)$ para $s \in [0, \eta]$.

$H_{\tilde{\gamma}}^b$ = curva con curvatura constante b parametrizada de forma que $p = H_{\tilde{\gamma}}^b(0)$, tangente a $\tilde{\gamma}$ en p , que rodea a los puntos $\gamma(s)$ para $s \in [0, \eta]$.

Por lo tanto, las curvas $\tilde{\gamma}$ y γ apuntan desde p hacia las regiones encerradas por las curvas de Jordan H_γ^a y $H_{\tilde{\gamma}}^b$ respectivamente. Definimos los ángulos de las cuñas:

$\alpha_H(s)$ = ángulo (interior) en p de la cuña cuyos lados son los segmentos $[p, H_\gamma^a(s)]$ y $[p, H_{\tilde{\gamma}}^b(s)]$.

$\alpha_\gamma(s)$ = ángulo (interior) en p de la cuña cuyos lados son los segmentos $[p, \gamma(s)]$ y $[p, \tilde{\gamma}(s)]$.

$L(H_*^c)$ = longitud hiperbólica de la curva con curvatura constante c (véase §1.1.4).

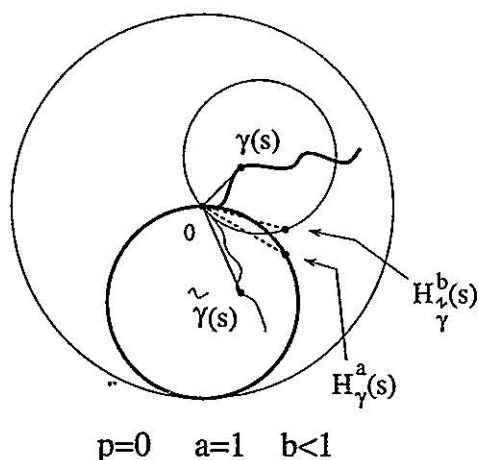


Figura 24

Obsérvese que H_γ^a y $H_{\tilde{\gamma}}^b$ se intersecan en los puntos p y, digamos, q .
Recuérdese que $p = H_\gamma^a(0) = H_{\tilde{\gamma}}^b(0)$.

Sean s_1 y \tilde{s}_1 tales que:

$$H_\gamma^a(s_1) = H_{\tilde{\gamma}}^b(\tilde{s}_1) = q$$

Para estos $\gamma, \tilde{\gamma}, H_\gamma^a, H_{\tilde{\gamma}}^b$ y con la notación introducida arriba, el siguiente resultado es cierto:

Teorema 7 Sea $m(a, b) = \min \left\{ s_1, \tilde{s}_1, \frac{L(H_\gamma^a)}{2}, \frac{L(H_{\tilde{\gamma}}^b)}{2} \right\}$.

Entonces,

$$\alpha_\gamma(s) \geq \alpha_H(s) \quad \text{para todo } s \leq m(a, b)$$

y el resultado es falso si $s > m(a, b)$.

Demostración. Denotamos por α al ángulo de la cuña curvada de lados γ y $\tilde{\gamma}$.

Para simplificar los cálculos y sin pérdida de generalidad asumimos que $a = b = 1$; entonces $m(1, 1) = 2 \tan(\alpha/2)$. El resultado general se sigue de este haciendo las modificaciones obvias.

Como en la prueba del Teorema 5 (véase la sección §2.4) probamos una versión discreta de éste teorema. El caso general se sigue de éste usando el mismo método de aproximación descrito en la sección §2.4.2.

Como en §2.4.1, fijamos L pequeño y β tales que $\beta = 2 \arctan(L/2)$, y consideramos las curvas poligonales $P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}$, $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}$, $P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}$, $P_{(\beta, \dots, \beta; L)}^*$ que aproximan γ , H_γ , $\tilde{\gamma}$, $H_{\tilde{\gamma}}$ respectivamente, tales que:

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(0) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(0) = P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(0) = P_{(\beta, \dots, \beta; L)}^*(0) = p \\ P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(L) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(L) \\ P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(L) &= P_{(\beta, \dots, \beta; L)}^*(L) \end{aligned}$$

(recuérdese que $|\alpha_i|, |\theta_i| \leq \beta$ para $i = 1, \dots, n-1$).

Denotamos por

$$\begin{aligned} P_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; L)}(iL) &= \gamma_i & P_{(\beta, \dots, \beta; L)}(iL) &= h_i \\ P_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}; L)}(iL) &= \tilde{\gamma}_i & P_{(\beta, \dots, \beta; L)}^*(iL) &= \tilde{h}_i \end{aligned}$$

Consideramos el punto $q = H_\gamma(2 \tan(\alpha/2)) = H_{\tilde{\gamma}}(2 \tan(\alpha/2))$, y recordamos que $m(1, 1) = 2 \tan(\alpha/2)$; consideramos los puntos $h_i \in H_\gamma$ y $\tilde{h}_i \in H_{\tilde{\gamma}}$ definidos arriba.

Estos puntos están ordenados a lo largo de H_γ y $H_{\tilde{\gamma}}$ respectivamente. Definimos n tal que q esté (en ese orden) entre h_n y h_{n+1} , y por lo tanto, entre \tilde{h}_n y \tilde{h}_{n+1} (para ser precisos, q podría ser h_n pero no h_{n+1}).

Fijamos este n . Recuérdense las definiciones de los paraguas $U(c, d)$ y los paraguas especiales $U(c, d; 1, n)$ (véase §1.1.5A y §1.1.5C respectivamente); observamos que:

- como $|\alpha_i|, |\theta_i| \leq \beta$ para $i = 1, \dots, n-1$, por el Lema 7' (sección §2.4)

$$\gamma_i \in U(h_0, h_1; 1, n) \quad \tilde{\gamma}_i \in U(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1; 1, n) \text{ para } i = 1, \dots, n$$

En particular,

$$\gamma_n \in U(h_0, h_1; 1, n) \quad \tilde{\gamma}_n \in U(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1; 1, n)$$

- como h_n y \tilde{h}_n están antes que q en H_γ y $H_{\tilde{\gamma}}$ respectivamente, entonces

$$\tilde{U}(h_0, h_1; 1, n) \cap U(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1; 1, n) = \emptyset$$

y por tanto

$$\pi - \text{ángulo } ([h_0, h_n], [\tilde{h}_0, \tilde{h}_n]) \leq \pi - \text{ángulo } ([\gamma_0, \gamma_n], [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_n])$$

Por el argumento de aproximación comentado arriba,

$$\alpha_H(s) \leq \alpha_\gamma(s)$$

Para ver que el resultado es óptimo, tomamos ϵ pequeño y consideramos (véase la figura siguiente):

H_ϵ = la intersección del horociclo en $\{z \in \mathbb{D} : \Im z < 0\}$ tangente a la geodésica $(-1, 1)$ en el punto ϵ , con $\{z \in \mathbb{D} : \Re z > \epsilon\}$

$H_{-\epsilon}$ = la intersección del horociclo en $\{z \in \mathbb{D} : \Re z > 0\}$ tangente a la geodésica $(-1, 1)$ en el punto $-\epsilon$, con $\{z \in \mathbb{D} : \Im z < -\epsilon\}$

$$\gamma = [0, \epsilon] \cup H_\epsilon$$

$$\tilde{\gamma} = [0, -\epsilon] \cup H_{-\epsilon}$$

Existe $s_1 > 2 \tan(\alpha/2)$ tal que $H_\epsilon(s_1) = H_{-\epsilon}(s_1)$ y por tanto

$$\alpha_\gamma(s_1) = 0 < \alpha_H(s_1)$$

□

Parte II

Integrales sobre contornos

En esta parte de la memoria estudiamos el problema de Gabriel desde el punto de vista de la teoría del potencial, es decir, estudiamos cuándo existe una constante finita k de forma que

$$\int_{\gamma} u(z)|dz| \leq k \int_{\partial\Omega} u(z)|dz|$$

donde $\gamma \subset \Omega$, u pertenece a cierta clase de funciones (armónicas, sub-armónicas u holomorfas).

De forma más general se estudia bajo qué condiciones

$$\int_{\gamma} u(z)A(z)|dz| \leq k \int_{\partial\Omega} u(z)B(z)|dz|$$

donde A y B son pesos naturales con significado geométrico. En particular se estudia

$$\int_{\gamma} u(z)|dz| \leq k \int_{\partial\Omega} u(z)V_{\gamma}(z)|dz|$$

donde $V_{\gamma}(z)$ es el ángulo total abarcado por γ en z (ver la página 77).

La idea clave está en intercambiar los papeles del ángulo total con el que la curva γ se ve desde la frontera y del núcleo de Poisson del dominio Ω . Veremos que el problema de Gabriel es equivalente a estimar la constante que aparece en este intercambio, a la que llamamos el funcional \mathbb{K} asociado al dominio Ω .

Este funcional depende fuertemente de la geometría del dominio Ω y de la de la curva γ . La razón de esto es la siguiente: el núcleo de Poisson de un semiplano asocia a cada punto interior el ángulo con el que se ve un conjunto pequeño de la frontera, y el ángulo total hace el juego contrario pues a cada punto de la frontera le asocia el ángulo con el que se ve la curva γ , $\gamma \subset \Omega$. En cierto sentido, una es la aplicación “inversa” de la otra, y el funcional mide lo bien que se puede “invertir”. Si la inversión es “buena”, el funcional es finito. Lo “buena” que sea esta “inversión” depende, fundamentalmente, de que no haya “muchos” puntos de la frontera que vean la curva γ con ángulo casi cero.

Damos a continuación una relación de los principales resultados de esta parte de la memoria. Para nomenclatura, definiciones básicas y resultados referimos al lector al capítulo 3.

Los resultados que damos en el capítulo 4 unifican y amplían los conocidos anteriormente para el caso particular de funciones armónicas y holomorfas (ver páginas 97 y 104 respectivamente). También se obtiene la constante

óptima para el problema de Gabriel. Más concretamente, estos teoremas establecen:

Teoremas 8 y 11 Sean Γ, γ curvas de Jordan rectificables con γ contenida en Ω , u positiva y subarmónica sobre Ω , y sea $1 \leq \lambda \leq \infty$. Entonces,

$$\int_{\gamma} u(z)^{\lambda} |dz| \leq K(\lambda, \Gamma) \int_{\Gamma} u(w)^{\lambda} V_{\gamma}(w) |dw|$$

donde

$$K(\lambda, \Gamma) = 2 \sup_{z \in \Omega, v \in \partial \mathbb{D}} K_{\Gamma}^{\lambda}(z, v),$$

La constante es óptima: para cada curva Γ , curva γ y exponente λ , hay una función u de forma que la igualdad se alcanza.

En el teorema, $K_{\Gamma}^{\lambda}(z, v)$ es cierto funcional asociado al dominio Ω ya mencionado; lo definiremos de forma rigurosa en el próximo capítulo.

Observamos que el exponente $\lambda = \infty$ está permitido: éste corresponde al caso en que la función sea holomorfa. Esta afirmación se sigue de un argumento que daremos en la sección §4.2.

Como dijimos anteriormente, la constante $K(\lambda, \Gamma)$ puede ser infinita si la “inversión” de papeles antes mencionada es mala. Tal será el caso de dominios convexos y exponente $\lambda \leq 2$ cuando el contacto de la curva γ con el borde del dominio no sea “suficientemente suave”. El siguiente teorema muestra que si γ es un círculo, entonces la constante $K(\lambda, \Gamma)$ es finita para exponente $\lambda \geq 1$ (y el 1 es óptimo):

Teorema 10 Para cualquier círculo C_r , cualquier función subarmónica y positiva u , y cualquier exponente $\lambda \geq 1$,

$$\int_{C_r} u(z)^{\lambda} |dz| \leq \int_{\Gamma} u(w)^{\lambda} \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2} V_{C_r}(w) \right) + r K_w^{\text{ext}} \right] |dw|$$

y si $\lambda = 1$, es óptima.

Los términos V_{C_r} y K_w^{ext} se explican en las secciones §3.1 y §3.6 respectivamente.

La razón por la que el exponente se puede “mejorar” a 1 es que no hay muchos puntos de la frontera para los que el ángulo con el que se ve C_r es pequeño.

Mencionamos que el Teorema 8 admite una generalización a n -dimensiones:

Teorema 9 Sean Γ y γ hipersuperficies n -dimensionales de Jordan y rectificables, u positiva y subarmónica en la componente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma$ que contiene a γ , y sea $\lambda > 2$. Entonces,

$$\int_{\gamma} u(z)^{\lambda} |dz| \leq K_n(\lambda, \Gamma) \int_{\Gamma} u(z)^{\lambda} V_{\gamma}(z) |dz|$$

donde $K_n(\lambda, \Gamma)$ es cierta función de Ω y γ .

Gabriel probó que para todo $\mu > 0$,

$$\int_{\gamma} |f(w)|^{\mu} \leq A \int_{\Gamma} |f(w)|^{\mu} V_{\gamma}(w) |dw|,$$

y conjeturó que la constante A podía ser reemplazada por un 2. Al final del Capítulo 5 damos un ejemplo que prueba que la conjetura no es cierta y lo hacemos para el caso particular $\mu = 1$, que es el de interés para nosotros.

Volvemos a considerar el caso particular de funciones holomorfas que sean la derivada de una aplicación conforme sobre el disco unidad (es decir, estudiamos un teorema de Hayman-Wu con el peso geométrico del ángulo total), y estudiamos en qué casos existe una constante finita para el problema de Gabriel. Este estudio nos lleva a considerar un tipo especial de dominios, los *dominios que no pueden ser pinchados*, que introducimos en esta memoria. De forma poco rigurosa, un dominio no puede ser pinchado si a cualquier punto del interior lo rodea “muchas” fronteras independientemente de la escala. La condición necesaria para que exista constante finita está dada en el siguiente teorema:

Teorema 12 Sea Ω un dominio de Jordan que no puede ser pinchado, $\Gamma = \partial\Omega$, y sea γ una curva de Jordan rectificable contenida en Ω . Entonces, para cualquier función conforme f de Ω sobre el disco unidad \mathbb{D}

$$\text{longitud}(f(\gamma)) = \int_{\gamma} |f'(z)| |dz| \leq M \int_{\Gamma} |f'(z)| V_{\gamma}(z) |dz| \quad (2.19)$$

donde M depende sólo de la constante R .

Explicaremos la noción de “dominio que no puede ser pinchado” en el capítulo 5.

La idea de la prueba es, una vez más, pasar de asociar puntos del interior con “intervalos” de frontera a la operación “inversa”, consistente en asociar a puntos de la frontera “conjuntos pequeños” de la curva γ .

Los resultados conocidos anteriormente a este trabajo se encuentran fundamentalmente en las secciones §3.1 y §3.5 y mencionados al principio del capítulo 4.

Capítulo 3

Nociones básicas

Presentaremos a continuación algunos conceptos básicos que serán necesarios para establecer los resultados principales de esta parte de la memoria. Recordaremos primero los conceptos de núcleo de Poisson y ángulo total y daremos algunos ejemplos; a continuación introduciremos un funcional sobre el dominio Ω , k_F^λ , $\Gamma = \partial\Omega$, definido en el fibrado círculo unidad, que será una herramienta clave en los Teoremas 8 y 11; por último definiremos el concepto geométrico de curvatura exterior.

La estructura del capítulo es:

3.1 Núcleo de Poisson.

3.2 Ángulo total.

3.3 Notación.

3.4 Un funcional sobre el dominio Ω .

3.5 Dos argumentos de simetría del núcleo de Poisson en dominios conexos.

3.6 Curvatura exterior de una curva.

3.1 Núcleo de Poisson

3.1.1 En el capítulo 4 trabajaremos con funciones armónicas y subarmónicas y usaremos fuertemente su relación con el núcleo de Poisson; por esto recordamos a continuación el núcleo de Poisson en dominios planos simplemente conexos y la fórmula integral de Poisson en tales dominios.

La cantidad

$$P_z^{\mathbb{D}}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \quad |z| < 1, |\xi| = 1 \quad (3.1)$$

es el *núcleo de Poisson* de \mathbb{D} normalizado (obsérvese la notación). Dada una función ϕ integrable, $\phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, la *integral de Poisson* de ϕ es

$$I_p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \phi(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

donde $|z| < 1$.

En principio, pues, la integral de Poisson es un método para obtener funciones armónicas en un dominio a partir de datos en su borde.

3.1.2 De hecho, toda función armónica en el disco (e integrable en $\partial\mathbb{D}$) admite una representación como integral de Poisson de su valor en el borde. Es decir, si u es armónica en el disco,

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_z^{\mathbb{D}}(\xi) u(\xi) d\xi, \quad (3.3)$$

(obsérvese que $\frac{d\xi}{2\pi}$ es la longitud de arco en $\partial\mathbb{D}$). Nótese que esta fórmula es la análoga a la de fórmula integral de Cauchy pero para funciones armónicas.

Este resultado, (3.3), será clave en el Teorema 8.

3.1.3 Hasta ahora hemos definido el núcleo de Poisson y su fórmula integral en el disco. Extendemos estos resultados a dominios simplemente conexos del plano como sigue:

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ es la aplicación de Riemann, para $z \in \Omega$ y $w \in \partial\Omega$ definimos el núcleo de Poisson $P_z^{\Omega}(w)$ como

$$P_z^{\Omega}(w) = P_{f(z)}^{\mathbb{D}} \circ f(w) \quad (3.4)$$

Observamos que es una función armónica en Ω .

Toda función armónica en Ω e integrable en $\partial\Omega$, $u(z)$, se recupera a partir del dato de borde mediante la integral

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} u(w) P_z^{\Omega}(w) |dw|, \quad (3.5)$$

con $|dw|$ el elemento de arco de $\partial\Omega$.

3.1.4 En el capítulo 4 será necesario poder establecer comparaciones entre núcleos de Poisson de distintos dominios. Recordamos por tanto una propiedad importante de las funciones armónicas que nos permite semejante propósito: el principio del máximo; éste establece que ninguna función armónica no constante alcanza el máximo o el mínimo en el interior del dominio donde está definida. Una consecuencia inmediata es que si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ y $w \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, entonces para todo $z \in \Omega_1$ y con la notación de arriba

$$P_z^{\Omega_1}(w) \leq P_z^{\Omega_2}(w) \quad (3.6)$$

3.1.5 Si u es una función subarmónica positiva en un dominio Ω simplemente conexo, para $z \in \Omega$ y $w \in \partial\Omega$

$$u(z) \leq \int_{\partial\Omega} P_z^\Omega(w) u(w) |dw| \quad (3.7)$$

donde $|dw|$ es el elemento de arco de $\partial\Omega$.

Observamos que dada una función armónica y otra subarmónica con el mismo dato de borde, la subarmónica queda “por debajo” de la armónica.

3.2 Ángulo total

3.2.1 Las funciones subarmónicas u están caracterizadas por la propiedad de la sub-media siguiente: si C_s denota el círculo centrado en 0 de radio s , y si $0 < r < R$, entonces

$$\int_{C_r} u(z) |dz| \leq r/R \int_{C_R} u(z) |dz| \quad (3.8)$$

donde $|dz|$ denota la longitud de arco euclídea

3.2.2 El cociente (r/R) en (3.8) tiene un significado geométrico que mostraremos a continuación (véase §3.2.5). Para un punto z situado en el exterior de la curva de Jordan γ , definimos el *ángulo total (absoluto normalizado) abarcado por γ en z* , $V_\gamma(z)$, como

$$V_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma |\partial_\gamma \arg(z-w)| |dw| \quad (3.9)$$

donde $\partial_\gamma \arg(z-w)$ significa la derivada direccional de la función argumento en la dirección γ' .

Obsérvese que, por definición, V_γ es aditivo en la curva γ .

Aquí y en lo que sigue, por el *exterior* de una curva de Jordan γ entenderemos la componente no acotada de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. De igual manera, con el *interior* de una curva de Jordan γ nos referiremos a la componente acotada de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$.

3.2.3 Hay otras maneras equivalentes de expresar el ángulo total que resultarán convenientes en este trabajo y que nos serán útiles en lo que sigue. Procedemos a describirlas.

(a) Si definimos ϕ como el ángulo entre el segmento de z a w y la tangente a la curva γ en el punto w (ver siguiente figura), entonces (3.9) se puede escribir de la siguiente manera

$$V_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|\sin \phi|}{|z - \xi|} |d\xi|$$

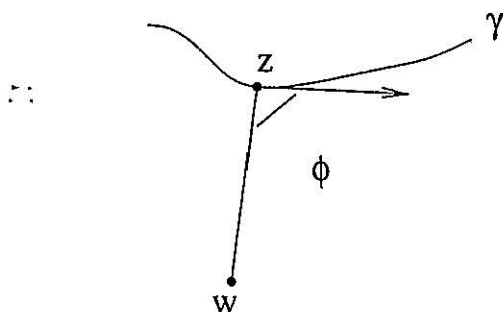


Figura 25

Para esto escribimos $\xi = x + iy$ y suponemos, sin pérdida de generalidad, que $z = a \in \mathbb{R}$; consideramos la función de dos variables

$$f(x, y) = \arg(a - (x + iy)) = \arctan\left(\frac{-y}{a - x}\right);$$

un sencillo cálculo prueba que

$$\partial_\gamma \arg(z - \xi) = \langle \nabla f, \gamma' \rangle = \frac{1}{|z - \xi|} (\pm \sin \phi) \quad (3.10)$$

donde \langle, \rangle denota el producto escalar (véase [Ca], [T, pág. 340]).

Esta forma de escribir V_γ aparece ya en la obra completa de Beurling [B, pág. 455] y es la que usaremos fundamentalmente en la memoria.

(b) Observamos que V_γ también se puede definir como

$$V_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_\gamma(z, e^{i\theta}) d\theta$$

donde la función $g_\gamma(z, e^{i\theta})$ cuenta cuántas veces el rayo emergente del punto z en la dirección θ interseca la curva γ .

3.2.4 Hay casos en los que es trivial estimar el ángulo total: algunos ejemplos de estos son:

- Si γ es el segmento $(-1, 1)$ y z es tal que $|z| = 1$, entonces

$$V_{(-1,1)}(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Este cálculo junto con el Teorema de Carlson (ver capítulo 4, página 96) implican el resultado probado por Fejer y Riesz [FR, pág. 46] que establece que, para cualquier $\lambda > 0$,

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^\lambda dx \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} |f(e^{i\theta})|^\lambda d\theta,$$

donde la integral de la izquierda se cuenta “una vez” (es decir, no consideramos la curva $\gamma = [-1, 1]$ como la curva cerrada que empieza en -1 , va hasta 1 y vuelve a -1 de nuevo).

- Si γ es una curva convexa cerrada entonces, para cada punto z exterior a la curva γ , $V_\gamma < 1$. El caso extremal es el mostrado en la Figura 26 (o cualquier configuración semejante):

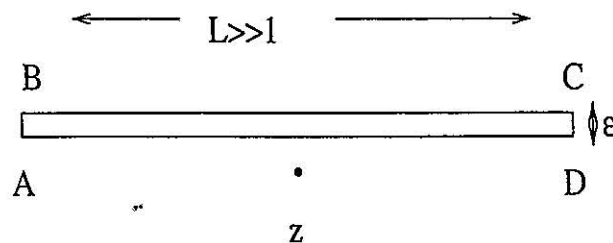


Figura 26

ya que desde z ,

$$\text{ángulo del segmento } AD = \text{ángulo } BC + \psi(\epsilon) \geq \pi - \phi(\epsilon)$$

con $\psi(\epsilon), \phi(\epsilon) \downarrow 0$ si $\epsilon \downarrow 0$; por tanto

$$V\gamma(z) = V_{AD}(z) + V_{AD}(z) \geq 1 - \phi(\epsilon)$$

(el ϵ aparece en el dibujo).

De hecho, esta propiedad caracteriza las curvas convexas: si para todo punto z en el exterior de la curva de Jordan γ , $V_\gamma(z) < 1$, entonces γ es convexa. El argumento es el siguiente: si para todo $\xi \in \gamma$ la curva γ está contenida en una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \{\text{tangente a } \gamma \text{ en } \xi\}$, entonces γ es convexa y no hay más que probar.

Supongamos por el contrario que existe un punto $\xi \in \gamma$ tal que la recta tangente a γ en ξ , R_ξ , corta a γ en algún otro punto. Tomamos z exterior a γ y tal que $|z - \xi| < \epsilon$, $\epsilon > 0$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $\xi = 0 \in \gamma$ y que $R_0 = \mathbb{R}$.

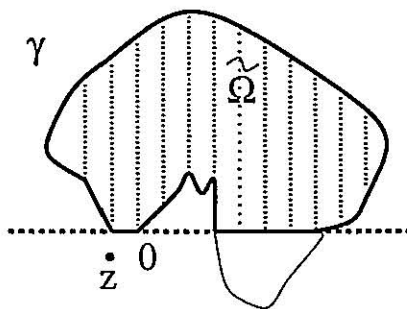


Figura 27

Sea $\tilde{\Omega}$ la intersección de la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ con el semiplano superior (ver figura anterior) y sea $\tilde{\gamma}$ su frontera, $\tilde{\gamma} = \partial\tilde{\Omega}$. Entonces

$$V_{\tilde{\gamma}}(z) \geq 1 - \phi(\epsilon)$$

con $\phi(\epsilon) \downarrow 0$ si $\epsilon \downarrow 0$

Como V_γ es aditiva en γ ,

$$V_\gamma(z) > V_{\tilde{\gamma}}(z) \geq 1 - \phi(\epsilon)$$

lo cual es una contradicción.

3.2.5 En el caso particular en el que γ sea C_r y Γ sea C_R , el cociente $\frac{r}{R}$ es igual a $\sin\left(\frac{\pi}{2}V_{C_r}(z)\right)$, y (3.8) se puede escribir como

$$\int_{C_r} u(z)|dz| \leq \int_{C_R} u(z) \sin\left(\frac{\pi}{2}V_{C_r}(z)\right) |dz| \quad (3.11)$$

3.2.6 Será de especial interés considerar el caso particular en el que el dominio Ω sea el semiplano superior \mathbb{H} . Un simple cálculo prueba que

$$P_z^{\mathbb{H}}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\Im z}{|z - t|^2} \quad (3.12)$$

Hay una conexión “infinitesimal” interesante entre el núcleo de Poisson de un semiplano cualquiera evaluado en un punto w , y el ángulo total de un segmento L contenido en la frontera del semiplano, y de longitud pequeña, visto desde w (conexión que fue explotada por Gabriel como ya se verá en la sección §3.5.1); si suponemos que el semiplano es el superior y el segmento $L = (0, |L|)$, y si α , τ y β son como en la figura siguiente

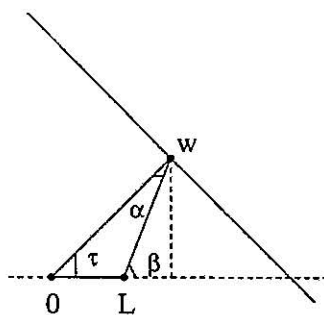


Figura 28

entonces

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{V_L(w)}{|L|} &= \frac{\alpha}{|L|} \approx \frac{\sin \alpha}{|L|} \\ &= \frac{\sin \tau}{|w|} \approx \frac{\sin \beta}{|w|} = \frac{\Im w}{|w|^2} \\ &= 2\pi P_w^{\mathbb{H}}(0) \end{aligned}$$

3.3 Notación

Será muy conveniente añadir notación especial para esta parte de la memoria.

- A partir de ahora γ y Γ son curvas rectificables (con propiedades adicionales como convexidad cuando esté especificado). Γ es una curva de Jordan que contiene a γ su interior, al que denotamos por Ω . Hablaremos, por tanto, indistintamente de Γ y de $\partial\Omega$.
- z denotará siempre un punto en γ y w un punto en Γ .
- $P_z^\Omega(w)$ es el núcleo de Poisson normalizado de Ω en $z \in \gamma$ evaluado en $w \in \Gamma$ (es decir, la densidad de la medida armónica respecto a la longitud de arco).
- $r = |z - w|$.

En el caso especial en el que la curva Γ sea convexa, es útil usar la siguiente notación:

- \mathbb{H}_w para el semiplano tangente a Γ en w que contiene a z .
- P para el núcleo de Poisson normalizado de \mathbb{H}_w .
- p para denotar la distancia euclídea de z a $\partial\mathbb{H}_w$.

A menudo consideramos que la curva γ es o bien convexa o simplemente un segmento. En estos casos necesitamos:

- \mathbb{H}_z es el semiplano tangente a γ en z que contiene w .
- Q es el núcleo de Poisson normalizado de \mathbb{H}_z .
- q denota la distancia euclídea de w a $\partial\mathbb{H}_z$.

3.4 Un funcional asociado al dominio Ω

Hasta ahora hemos dedicado el capítulo a recordar algunos hechos ya conocidos; en esta sección cambiamos de tónica e introducimos unos funcionales asociados a un dominio (fijo) que, como anunciamos en el capítulo anterior, son los objetos que determinan la constante óptima para el problema de Gabriel (ver capítulo 4).

Procedemos por tanto a describir una determinada colección de funcionales definidos sobre el fibrado círculo unidad de Ω .

Introducimos la siguiente notación: dados cualquier dirección \mathbf{v} y cualquier punto $w \in \partial\Omega$, sea $L_{\mathbf{v}}$ una línea recta cuya tangente es \mathbf{v} (ésta divide al plano complejo en dos semiplanos); denotamos por Q al núcleo de Poisson normalizado del semiplano con frontera $L_{\mathbf{v}}$ que contiene al punto w (este uso de Q es un pequeño abuso de notación).

3.4.1 Fijamos el dominio Ω y un exponente λ , $1 \leq \lambda \leq \infty$, y definimos el funcional K_{Γ}^{λ} para todo punto $z \in \Omega$ y vector unitario \mathbf{v} (obsérvese que (z, \mathbf{v}) es un punto en el fibrado círculo unidad de Ω) como sigue:

$$\begin{aligned} K_{\Gamma}^1(z, \mathbf{v}) &= \sup_{w \in \Gamma} \frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q}, & \lambda &= 1 \\ K_{\Gamma}^{\lambda}(z, \mathbf{v}) &= \left\{ \int_{\Gamma} \left(\frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right)^{\frac{1}{\lambda-1}} P_z^{\Omega}(w) |dw| \right\}^{\lambda-1}, & 1 < \lambda < \infty \\ K_{\Gamma}^{\infty}(z, \mathbf{v}) &= \exp \int_{\Gamma} \log \left(\frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right) P_z^{\Omega}(w) |dw|, & \lambda &= \infty \end{aligned}$$

Damos dos ejemplos relevantes:

Ej. 1 Si Γ es una curva de Jordan convexa es fácil estimar $K_{\Gamma}^{\lambda}(z, \mathbf{v})$ y ver que, si $\lambda > 2$, está acotado. Para esto será conveniente recordar primero la notación de P, Q y \mathbb{H}_w (véase la página 82). Observamos que como $\Omega \subset \mathbb{H}_w$, la integral del funcional K_{Γ}^{λ} se puede mayorar por

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right)^{\beta} P_z^{\Omega}(w) |dw| \leq \int_{\Gamma} \left(\frac{P}{Q} \right)^{\beta} P |dw|; \quad (3.13)$$

$$\text{con } \beta = \frac{1}{\lambda - 1}.$$

Si ϕ el ángulo entre el segmento que pasa por z y w y la perpendicular a $\partial\mathbb{H}_z$, y si ds el elemento de ángulo abarcado en z , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(\frac{P}{Q}\right)^{\beta} P|dw| &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|\cos \phi|^3} ds \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{|\cos \phi|^{\beta}} 2d\phi \\ &= \frac{4}{\pi 2^{\beta+1}} B\left(\frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2}\right) < \infty \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de que $P \leq \frac{1}{|z-w|^2}$ y

$Q = \frac{|\cos \phi|}{|z-w|^2}$, y la última del hecho de que como $\lambda > 2$, $\beta < 1$. Aquí B denota la función especial Beta (véase, por ejemplo, [GR, pág. 957]).

Ej. 2 Si Γ es el disco, entonces $K_{\Gamma}^{\infty}(z, \mathbf{v}) = 1$. Esto será mucho más transparente después de las observaciones de 3.4.3 y del próximo Lema 11.

Observamos que $K_{\Gamma}^{\lambda}(z, \mathbf{v})$, $1 \leq \lambda \leq \infty$, está realmente definida sobre el fibrado círculo unidad: no sólo depende del punto $z \in \Omega$, también depende de la dirección \mathbf{v} de la tangente a γ en z (recuérdese que Q es el núcleo de Poisson normalizado del semiplano tangente a γ en z que contiene a w , y por tanto, \mathbf{v} está implícito en Q).

3.4.2 Este funcional admite la siguiente expresión integral para el caso $\lambda = \infty$:

Lema 11

$$K_{\Gamma}^{\infty}(z, \mathbf{v}) = \exp \int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} \quad (3.14)$$

donde ψ es el ángulo entre el segmento de z a w y la tangente a γ en z , y $d\omega_z^{\Omega}$ denota medida armónica en Ω .

Esta representación de K_{Γ}^{∞} será útil en la sección §4.2.

Demostración.

La clave está en la relación que existe entre el núcleo de Poisson y la función de Green y en que ésta última se anula en la frontera del dominio. Un par de cambios (conformes) de variables finalizan la prueba. Los cálculos detallados son:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \log \left(\frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right) P_z^{\Omega}(w) |dw| = \\
& = \int_{\Gamma} P_z^{\Omega}(w) \log P_z^{\Omega}(w) |dw| - \int_{\Gamma} P_z^{\Omega}(w) \log(Q) |dw| \\
& = I + II
\end{aligned}$$

Calculamos I: si g_{Ω} denota la función de Green en Ω con polo en z , entonces

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Gamma} \log \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\partial g_{\Omega}}{\partial \mathbf{n}} \right) P_z^{\Omega}(w) |dw| \\
&= \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) 1 + \int_{\Gamma} P_z^{\Omega}(w) \log \frac{\partial g_{\Omega}}{\partial \mathbf{n}} |dw|;
\end{aligned}$$

pero sobre Γ , g_{Ω} es idénticamente cero, y por tanto $\frac{\partial g_{\Omega}}{\partial \mathbf{n}} = |\nabla g_{\Omega}|$. Esto, junto con el cálculo hecho arriba da

$$I = \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) + \int_{\Gamma} P_z^{\Omega}(w) \log |\nabla g_{\Omega}| |dw|.$$

Sea $H : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una función conforme con $H(0) = z$, y sea $g_{\mathbb{D}}$ la función de Green de \mathbb{D} con polo en 0. Entonces, cambiando variables y observando que $g_{\Omega} \circ H = g_{\mathbb{D}}$ se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
I &= \log \frac{1}{2\pi} + \int_{\partial \mathbb{D}} \log |\nabla g_{\mathbb{D}}| \frac{d\theta}{2\pi} - \int_{\partial \mathbb{D}} \log |H'| \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \log \frac{1}{2\pi} - \log |H'(0)| \\
&= \log \frac{1}{2\pi |H'(0)|}
\end{aligned}$$

donde se usa que $|\nabla g_{\mathbb{D}}| = 1$ sobre $\partial \mathbb{D}$.

Calculamos ahora II. Tras un cambio de variables dado por H , la integral II se reescribe:

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\partial \mathbb{D}} \log \frac{\pi |H|^2 |d\xi|}{q(H\xi) 2\pi} \\
&= \log \pi + \int_{\partial \mathbb{D}} \log \frac{|H| |d\xi|}{|\xi| 2\pi} + \int_{\partial \mathbb{D}} \log \frac{|H| |d\xi|}{q(H\xi) 2\pi} \\
&= \log (\pi |H'(0)|) + \int_{\partial \mathbb{D}} \log \frac{|H| |d\xi|}{q(H\xi) 2\pi}
\end{aligned}$$

Finalmente, sumando I y II, y deshaciendo el cambio (conforme) de variables obtenemos:

$$\begin{aligned}\log K_{\Gamma}^{\infty}(z, v) &= \log \frac{1}{2} + \int_{\partial \mathbb{D}} \log \frac{|H|}{q(H\xi)} \frac{|d\xi|}{2\pi} \\ &= \int_{\partial \mathbb{D}} \log \frac{1}{|2 \sin \psi(\xi)|} \frac{|d\xi|}{2\pi} \\ &= \int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega}\end{aligned}$$

donde el ángulo ψ y $d\omega_z^{\Omega}$ son los del Lema 11. Esto termina la prueba.

□

3.4.3 La expresión

$$\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} \quad (3.15)$$

aparece en la parte de las obras de Beurling que tiene relación con este tipo de problemas [B, pp 457].

- Si $\theta(\psi)$ denota la medida armónica en Ω del arco I de la figura siguiente:

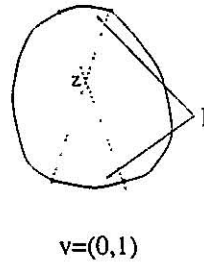


Figura 29

se ve fácilmente que

$$\sup_{\Gamma \text{ convex}, z, v} 2 \exp \left(\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} \right) \leq 4,$$

observando simplemente:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} &= \int_0^{\pi} \log \frac{1}{2 \sin \psi} d\theta(\psi) \\
&\leq \log \frac{1}{2} + \int_0^{\pi} \log \frac{1}{\sin \psi} \frac{2}{\pi} d\psi \\
&= \log \frac{1}{2} + 2 \log 2 = \log 2
\end{aligned}$$

- Beurling probó mediante un bello argumento de simetría que veremos con detalle en §3.5.2 la estimación no trivial siguiente ([B, pág. 455]):

$$\sup_{\Gamma \text{ convex}, z, \mathbf{v}} 2 \exp \left(\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} \right) \leq 3.7$$

- Observamos que este supremo sobre curvas convexas Γ debería ser al menos 2 ya que si Γ es el círculo unidad, entonces, para $\Theta(\psi)$ definido como en la figura 29:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{(2 \sin \psi)} d\Theta(\psi) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{(2 \sin \psi)} d\psi = 0,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

y se obtiene el resultado de Carlson (véase la página 96)

Ahora está claro por qué $K_{\mathbf{D}}^{\infty} = 1$ como afirmábamos en el ejemplo 2.

La importancia de cotas óptimas para este funcional será manifiesta en el capítulo 4.

3.4.4 Antes de terminar esta sección hacemos una observación útil sobre el funcional $K_{\Gamma}^{\infty}(z, \mathbf{v})$. Denotamos por

$$K(\Omega, z, \mathbf{v}) = \log K_{\Gamma}^{\infty}(z, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega},$$

y observamos que obtener una cota para $K(\Omega, z, \mathbf{v})$ que sea válida para todas las ternas (Ω, z, \mathbf{v}) es equivalente a obtener una cota para $K(\Omega, 0, \mathbf{v})$ válida para todas las parejas (Ω, \mathbf{v}) con $0 \in \Omega$.

Tenemos el siguiente resultado:

Lema 12 Para todo dominio Ω , punto z , y dirección v ,

$$K(\Omega, z, v) \leq 0 \text{ si y sólo si } K(\Omega, z, v) = 0 \text{ para todo } v.$$

Demostración. Integrando sobre todas las direcciones v la expresión para el funcional $K(\Omega, z, v)$,

$$\int_{\partial\mathbb{D}} K(\Omega, z, v) \frac{dv}{2\pi} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\mathbb{D}} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} \frac{dv}{2\pi} d\omega_z^\Omega = 0 \quad (3.17)$$

donde la última igualdad se sigue de la identidad de Jensen (véase, por ejemplo, [Ru, pág. 307]).

Por tanto, si $K(\Omega, z, v) \leq 0$ entonces $K(\Omega, z, v) = 0$ para todo v .

□

3.5 Dos argumentos de simetría del núcleo de Poisson en dominios convexos

El núcleo de Poisson será la pieza clave para estimar la constante del problema de Gabriel con funciones subarmónicas. Cuando el dominio Ω es convexo, hay dos maneras no triviales de usar cierta simetría de dicho núcleo (una debida a Gabriel y otra a Beurling) que contienen las ideas clave de algunos argumentos que usaremos posteriormente para dominios no convexos.

Para el resto de la sección es conveniente recordar la notación para P^Ω , \mathbb{H}_w , p , q y r dadas en la página 82.

En el resto de la sección consideramos que Ω es un dominio convexo y aprovechamos este hecho para simetrizar de dos maneras distintas: en la primera manera, debida a Gabriel, sustituimos el dominio Ω por un semiplano y la idea fundamental consiste en relacionar el núcleo de Poisson de este semiplano (“ángulo” con el que un trozo pequeño de frontera se ve desde un punto interior z) con el núcleo de Poisson del semiplano \mathbb{H}_w (“ángulo” con el que un segmento del interior de Ω es visto desde un punto de la frontera); en la segunda manera, debida a Beurling, usamos la simetría de la medida armónica de un convexo respecto al ángulo que parametriza su frontera.

Argumento de Gabriel

El argumento que describimos a continuación se debe a Gabriel [G1].

Recordamos que la situación en el problema de Gabriel es la siguiente: tenemos dos curvas, Γ convexa y γ rectificable contenida en el interior de Γ , y dos integrales sobre estas curvas que queremos comparar; es decir, queremos saber para qué K

$$\int_{\gamma} u(z)|dz| \leq K \int_{\Gamma} u(z)V_{\gamma}(z)|dz|, \quad (3.18)$$

partiendo de que u es positiva y subarmónica en Ω , es decir, partiendo de:

$$u(z) \leq \int_{\Gamma} u(w)P_z^{\Omega}(w)|dw|. \quad (3.19)$$

Parece obvio que una manera de estimar la constante K sea la de relacionar el núcleo de Poisson con el ángulo total.

Como vimos en §3.2.6, si L es un segmento pequeño de la frontera de un semiplano, H , w es un punto del semiplano y z está en el segmento L ,

$$P_w^H(z) \approx \frac{V_L(w)}{|L|}$$

Si tenemos un dominio convexo Ω basta con considerar el núcleo de Poisson del semiplano \mathbb{H}_w de la Figura 30 y mayorar el lado derecho de la ecuación (3.19) por éste. Como γ es rectificable, y ambos lados de (3.18) son aditivos en γ , basta tener (3.19) para un segmento que contenga z . Es decir, basta con considerar los dos semiplanos \mathbb{H}_w y \mathbb{H}_z de la Figura 30:

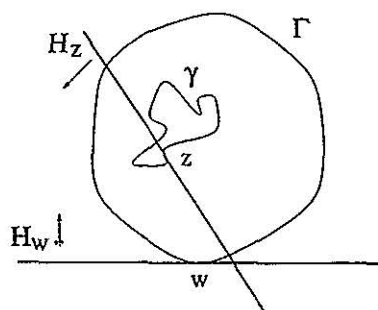


Figura 30

El juego de Gabriel consiste en pasar del núcleo de Poisson de \mathbb{H}_w (ver figura anterior) a \mathbb{H}_z (es decir, del ángulo visto desde z interior al ángulo visto desde w en la frontera). (Ver la figura anterior.)

Para ser consistente con la notación, w representará un punto del borde del dominio Ω y z un punto interior; por q denotaremos la distancia del punto w al borde de \mathbb{H}_z y p la del punto z al borde de \mathbb{H}_w .

(A) Situación simétrica.

Si los puntos z y w son simétricos respecto a la recta que biseca el ángulo de intersección de $\partial\mathbb{H}_z$ y $\partial\mathbb{H}_w$ como en la figura siguiente

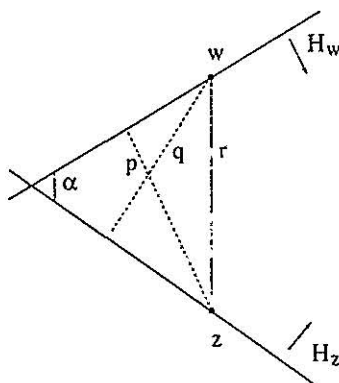


Figura 31

entonces claramente $p = q$ y por tanto

$$P_z^{\mathbb{H}_w}(w) = P_w^{\mathbb{H}_z}(z) \quad (3.20)$$

siendo inmediato el paso de un núcleo a otro.

(B) Situación general.

Si fijamos el punto z y “trasladamos” w , entonces, con la notación de la Figura 32:

$$P_z^{\mathbb{H}_w}(w) = \frac{q}{|z - w|^2} = \text{cte} \frac{\tilde{q}}{|z - w|^2} = P_z^{\mathbb{H}_w}(w^*);$$

usando el caso simétrico anterior concluimos que

$$P_z^{\mathbb{H}_w}(w^*) = \text{cte} P_w^{\mathbb{H}_z}(z)$$

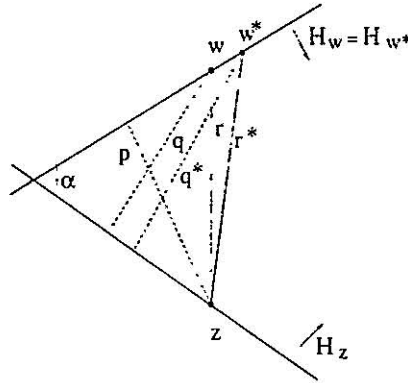


Figura 32

(C) Con este juego, el argumento de Gabriel para estimar la constante K termina con aplicar la desigualdad de Hölder y acotar la “cte” que relaciona ambos núcleos de Poisson.

$$\begin{aligned}
 u(z) &\leq \int_{\Gamma} u(w) P_z^{\Omega}(w) |dw| \leq \int_{\Gamma} u(w) \underbrace{\frac{p}{|z-w|^2}}_{(*)} |dw| \\
 &= \int_{\Gamma} u(w) \underbrace{\frac{q}{|z-w|^2}}_{(**)} \frac{p}{q} |dw|
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $(*)$ es el ángulo con el que $|dw|$ es visto desde $z \in \Omega$ y $(**)$ es $\frac{1}{|dz|}$ veces el ángulo con el que dz es visto desde $w \in \partial\Omega$.

Ahora basta con aplicar la desigualdad de Hölder, integrar sobre γ en ambos lados (obtenemos así el ángulo total), y estimar el supremo sobre Γ de la relación p/q .

Argumento de Beurling

Como ya mencionamos en la sección §3.4.3, Beurling probó mediante un bello argumento de simetría [B, pág. 455] la siguiente estimación no trivial:

$$\sup_{\Gamma \text{ convex}, z, v} 2 \exp \left(\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} \right) \leq 3.7$$

La idea es la siguiente: en primer lugar, por simetría

$$\int_{\Gamma} \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^{\Omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{(2 \sin \psi)} d\Theta(\psi),$$

donde $d\Theta(\psi)$ es la medida armónica de la unión de los arcos AB y CD de la siguiente figura

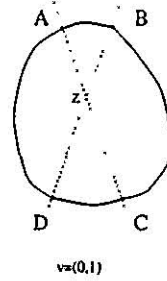


Figura 33

El paso fundamental consiste en mayorar $d\Theta$ reemplazando Γ por el sector S determinado por los arcos infinitesimales AB y CD

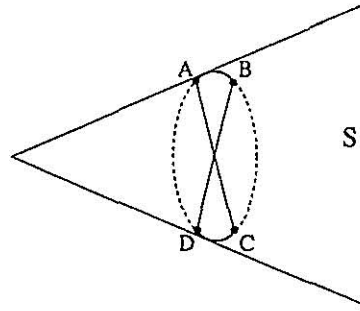


Figura 34

Para un punto arbitrario $z \in S$, la medida armónica en S correspondiente a estos arcos es menor que el ángulo total con el que se ven desde z (sería la de un semiplano), y por tanto

$$d\Theta \leq \frac{4d\psi}{\pi}.$$

Usando esto, un cálculo sencillo prueba que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{(2 \sin \psi)} d\Theta(\psi) \leq 1.85,$$

obteniéndose así la estimación de Beurling.

3.6 Curvatura exterior de una curva

Esta noción será una herramienta fundamental para manejar la geometría de la curva $\Gamma (= \partial\Omega)$, que a su vez será clave en la solución del problema de funciones conformes de Hayman-Wu considerado como un caso particular del problema de Gabriel (es decir, Hayman-Wu “con peso”, véase el capítulo anterior).

Sea Γ una curva de Jordan rectificable. Para cada punto $p \in \Gamma$ consideramos la familia de círculos C_t^p de radios t tangentes a la curva Γ en p y cuyos interiores no intersequen Γ y los cuales estén contenidos en el exterior de Γ .

Sea

$$t_p = \sup \{ \text{radios de } C_t^p \}$$

(es infinito si y sólo si Γ es convexa).

Definimos la *curvatura exterior* k_p^{ext} de Γ en p como

$$k_p^{\text{ext}} = \frac{1}{t_p}$$

Capítulo 4

El Problema de Gabriel

Estudiamos el problema propuesto por Gabriel en los años 30 (véase [G1], [G2], [G3]):

Dado un par de curvas de Jordan rectificables, γ y Γ , con γ contenida en el interior de Γ , Ω , y dado cualquier número positivo λ , encontrar la mejor constante K tal que para toda función u subarmónica positiva

$$\int_{\gamma} u^{\lambda}(z)|dz| \leq K \int_{\Gamma} u^{\lambda}(z)V_{\gamma}(z)|dz| \quad (\text{G})$$

Nos referimos a esta cuestión como el Problema de Gabriel. (G).

Nuestro propósito en este capítulo es el de hallar las constantes óptimas para las funciones subarmónicas positivas con cualquier exponente λ (incluyendo el caso $\lambda = \infty$, que, como veremos, corresponde a estudiar el problema de Gabriel para funciones holomorfas), y para cualquier par de curvas γ y Γ . También probaremos que una conjetura planteada por Gabriel no es cierta.

El plan para el capítulo es el siguiente:

4.1 Funciones subarmónicas.

4.1.1 La constante óptima.

4.1.2 Un caso especial: γ es un círculo.

4.2 Funciones holomorfas.

4.2.1 La constante exacta.

4.2.2 Un contraejemplo a la conjetura de Gabriel.

Antes de terminar esta introducción, señalamos que diversos autores han estudiado este problema obteniendo resultados para curvas especiales,

dominios determinados, o para exponentes concretos. Enunciamos algunos de éstos:

- Como ya mencionamos en §3.5, Gabriel [G1] probó que para funciones subarmónicas, dominios convexos y exponentes $\lambda > 2$, la constante es finita (incluimos el caso $\lambda = \infty$, es decir, el de funciones holomorfas).
- Carlson [Ca] mostró que para funciones holomorfas, si el dominio es el círculo unidad, para cualquier exponente positivo λ , la constante es a lo sumo 2.

Estos resultados quedan englobados como casos particulares del análisis de este capítulo.

4.1 Funciones subarmónicas

Nos ocuparemos del problema de Gabriel (G) para este tipo de funciones. Nuestro objetivo es el de estimar la constante K para la cual dadas Γ , γ y λ cualesquiera,

$$\int_{\gamma} u^{\lambda}(z)|dz| \leq K \int_{\Gamma} u^{\lambda}(z)V_{\gamma}(z)|dz|$$

para toda u subarmónica y positiva.

Consideramos primero la situación más general en la que las curvas Γ y γ son rectificables y vemos cómo la constante óptima está relacionada directamente con los funcionales k_{Γ}^{λ} introducidos en el capítulo anterior; nos ocupamos después del caso en el que γ sea un círculo, y vemos como el hecho de que el núcleo de Poisson de Ω sea armónico en el interior simplifica considerablemente la estimación de la constante K en este caso. Finalmente generalizamos el problema de Gabriel a n -dimensiones. Es conveniente para el lector recordar la definición y las propiedades básicas del núcleo de Poisson de la sección §3.1.

4.1.1 La constante óptima

El resultado principal de esta sección generaliza y unifica todo lo hecho anteriormente y da la constante óptima para el caso más general:

Teorema 8 Sean Γ , γ curvas de Jordan rectificables con γ contenida en Ω , u positiva y subarmónica sobre Ω , y $\lambda > 2$. Entonces,

$$\int_{\gamma} u(z)^{\lambda} |dz| \leq K(\lambda, \Gamma) \int_{\Gamma} u(w)^{\lambda} V_{\gamma}(w) |dw| \quad (4.1)$$

donde

$$K(\lambda, \Gamma) = 2 \sup_{z \in \Omega, v \in \partial \mathbb{D}} K_{\Gamma}^{\lambda}(z, v) \quad (4.2)$$

La constante es óptima: para cada curva Γ , curva γ y exponente λ , hay una función u de forma que la igualdad se alcanza.

Observaciones:

- Si la curva Γ es convexa, y el exponente $\lambda > 2$, entonces $K(\lambda, \Gamma) < \infty$ (véase §3.4, ejemplo 1).
- La prueba es válida para todo $\lambda \geq 1$, pero véase la siguiente observación:
- $\lambda > 2$ es el mejor exponente posible: dada Γ convexa y $\lambda \leq 2$, $K(\lambda, \Gamma) = \infty$. Fenton [F] dió un ejemplo para $\Gamma = \partial \mathbb{H}$.

Aún más: existe un par (z, v) tal que $K_{\Gamma}^{\lambda}(z, v) = \infty$. Veamos la idea de porqué esto último es cierto: sin pérdida de generalidad supondremos que $\Gamma = \mathbb{H}$ y que z, v son tales que la recta que pasa por z y cuya tangente es v pasa por 0 (ver figura)

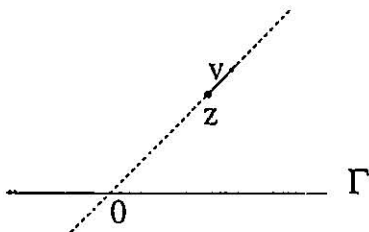


Figura 35

z está fijo; para $t \in \partial\mathbb{H}$ con $|t| \ll 1$, y con \int_0 representando la integral evaluada “cerca” de cero:

$$k_F^\lambda(z, v) \approx \int_0 \frac{p^{3+1}}{q^3} \approx \int_0 \frac{p^{3+1}}{C|t|^3}$$

donde p y q son como en la figura. Esta integral se comporta como

$$\approx |t|^{1-\beta} \quad \text{si } \beta \neq 1$$

$$\text{y} \\ \approx \log |t| \quad \text{si } \beta = 1;$$

observamos que, si $\beta \leq 1$, k_F^λ tiende a infinito; recordamos que $\beta = \frac{1}{\lambda-1}$, y por tanto la constante explota para $\lambda < 2$.

- La condición de que u sea positiva es necesaria para que el teorema sea cierto como muestra el ejemplo $U(z) = \log |z|$ en el disco unidad ($[F]$), ya que para este ejemplo la integral de la derecha de (4.1) es cero mientras que la de la izquierda es positiva si γ no es un punto.

Demostración. Primero reducimos la prueba al caso en el que la curva γ sea un segmento; entonces el juego de Gabriel entre núcleos de Poisson visto en §3.5.1 y la desigualdad de Hölder terminarán el argumento.

Como γ es rectificable la podemos aproximar por una curva poligonal P^γ cuyos vértices estén sobre γ . Sean $P_0^\gamma = \gamma(0), \dots, P_n^\gamma = \gamma(1)$ los vértices de P^γ , y sean L_1, \dots, L_n sus lados (es decir, cada L_j es un segmento euclídeo que empieza en P_{j-1}^γ y termina en P_j^γ). Entonces, para cualquier u :

- $\left| \int_\gamma u(z) |dz| - \sum_{i=1}^n \int_{L_i} u(z) |dz| \right| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$
- $|V_\gamma - V_{P^\gamma}| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$

Será suficiente probar (4.1) para la curva poligonal P^γ .

Tanto la integral del lado izquierdo de (4.1) como V_{P^γ} son aditivos sobre P^γ , por esto es suficiente probar (4.1) para un segmento, digamos L .

Queremos probar

$$\int_L u(z)^\lambda |dz| \leq K(\lambda, \Gamma) \int_\Gamma u(w)^\lambda V_L(w) |dw|,$$

que es cierto si y sólo si (con la notación de arriba):

$$u(z)^\lambda \leq \frac{K(\lambda, \Gamma)}{2} \int_\Gamma u(w)^\lambda Q |dw| \quad (4.3)$$

ya que recuerdese que para cualquier dirección \mathbf{v} , con L el segmento $L = [z, z + t\mathbf{v}]$, y cualquier $w \in \gamma$, debido a que Q sólo depende de \mathbf{v} ,

$$\frac{V_L(w)}{|L|} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{q}{\pi|w - z|^2} = \frac{Q}{2}$$

cuando $t \rightarrow 0$ (véase §3.2.6).

Nosotros probamos (4.3).

Suponemos primero que u es armónica; entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} u(z)^\lambda &= \left(\int_{\Gamma} u(w) P_z^\Omega(w) |dw| \right)^\lambda \\ &\leq \left(\int_{\Gamma} u(w)^\lambda Q |dw| \right) \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{P_z^\Omega(w)}{Q} \right)^\beta P_z^\Omega(w) |dw| \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $\beta = \frac{1}{\lambda - 1}$ (aquí aparece el juego entre los núcleos de Poisson que hacía Gabriel §3.5.1). \therefore

Comparando esta desigualdad con (4.3) tenemos que, para funciones armónicas,

$$\begin{aligned} K(\lambda, \Gamma) &= 2 \sup_{z \in \Omega, \mathbf{v} \in \partial \mathbb{D}} \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{P_z^\Omega(w)}{Q} \right)^\beta P_z^\Omega(w) |dw| \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= 2 \sup_{z \in \Omega, \mathbf{v} \in \partial \mathbb{D}} K_\Gamma^\lambda(z, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Para funciones u subarmónicas, consideramos su mayorante armónica U . El resultado se sigue de aplicar (4.3) a la función U .

Observamos que la constante es la mejor posible; la igualdad se alcanza cuando en (4.4) hay igualdad, es decir, cuando u es como sigue: para cada $z_0 \in \Omega$ y cada dirección \mathbf{v} , tomamos u como la función armónica sobre Ω con valores de frontera $u(w) = \left(\frac{P_{z_0}^\Omega(w)}{Q} \right)^\beta$.

□

Hay una manera más útil de expresar la constante $K(\lambda, \Gamma)$ que involucra ambas curvas más explícitamente, sin embargo, no es óptima y por esto no será mencionada más. Para que la memoria sea lo más completa posible, la daremos a continuación:

Lema 13 Sean $\lambda \geq 1$, λ' tales que $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1$, y $\beta = \frac{\lambda}{\lambda'}$. Entonces, para γ , Γ , Ω , y para u como en el Teorema 8

$$\int_{\gamma} u(z)^{\lambda} |dz| \leq C(\gamma, \Gamma) \int_{\Gamma} u(w)^{\lambda} V_{\gamma}(w) |dw|$$

donde

$$C(\gamma, \Gamma)^{\beta} = \sup_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{V_{\gamma}^{\beta}} \left(\int_{\gamma} (P_z^{\lambda}(w))^{\lambda} |dz| \right)^{\beta}$$

Demostración. Se sigue de una aplicación directa de la desigualdad de Minkowski seguida de la de Hölder:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} u^{\lambda}(z) |dz| \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} \left\{ \int_{\Gamma} u(w) P_z^{\Omega}(w) |dw| \right\}^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ & \leq \int_{\Gamma} \left(\int_{\gamma} u^{\lambda}(w) P_z^{\Omega}(w)^{\lambda} |dz| \right)^{\frac{1}{\lambda}} |dw| \\ & = \int_{\Gamma} u(w) V_{\gamma}^{\frac{1}{\lambda}}(w) \left(\int_{\gamma} \frac{P_z^{\Omega}(w)^{\lambda}}{V_{\gamma}(w)} |dz| \right)^{\frac{1}{\lambda}} |dw| \\ & \leq \left(\int_{\Gamma} u^{\lambda}(w) V_{\gamma}(w) |dw| \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{\Gamma} \left\{ \int_{\gamma} \frac{P_z^{\Omega}(w)^{\lambda}}{V_{\gamma}(w)} |dz| \right\}^{\frac{\lambda'}{\lambda}} |dw| \right)^{\frac{1}{\lambda'}} \end{aligned}$$

Elevando ambos lados a la potencia λ se obtiene el resultado deseado.

□

Para finalizar esta sección mencionaremos que, siguiendo las ideas desarrolladas en este capítulo, podemos dar una expresión explícita de la constante de Gabriel para cualquier $n \geq 3$. En el caso particular de que la hipersuperficie sea convexa, las ideas están contenidas en [G1]. Debido a que no hay ideas nuevas involucradas en la prueba de este teorema, sólo lo enunciaremos:

Teorema 9 Sean Γ y γ hipersuperficies n -dimensionales de Jordan y rectificables, u positiva y subarmónica en la componente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma$ que contiene a γ , y sea $\lambda > 2$. Entonces,

$$\int_{\gamma} u(z)^{\lambda} |dz| \leq K_n(\lambda, \Gamma) \int_{\Gamma} u(z)^{\lambda} V_{\gamma}(z) |dz|$$

donde $K_n(\lambda, \Gamma)$ es cierta función de Ω y γ .

4.1.2 Un caso especial: γ es un círculo

Como uno puede fácilmente imaginar, el caso en el que la curva γ es un círculo C_r , digamos centrado en el origen y de radio r , es particularmente simple, pues, debido a que el núcleo de Poisson es armónico en el interior del dominio:

$$\begin{aligned} \int_{C_r} u(z)|dz| &\leq \int_{\Gamma} u(w) \left[\int_{C_r} P_z^{\Omega}(w)|dz| \right] |dw| \\ &= \int_{\Gamma} u(w) P_0^{\Omega}(w) |dw|. \end{aligned}$$

En este caso, la constante en el problema de Gabriel, (G) , es finita para todo exponente $\lambda \geq 1$ (obsérvese el 1 en lugar del 2 como límite para el exponente; al final de la sección daremos una idea de porqué esto es así).

Recuérdese la noción de curvatura exterior de una curva con respecto a otra.

El resultado principal de esta sección afirma:

Teorema 10 *Para cualquier círculo C_r , cualquier función subarmónica y positiva u , y cualquier exponente $\lambda \geq 1$*

$$\int_{C_r} u(z)^{\lambda} |dz| \leq \int_{\Gamma} u(w)^{\lambda} \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2} V_{C_r}(w) \right) + r k_w^{\text{ext}} \right] |dw|$$

y si $\lambda = 1$, es óptima.

Hemos de observar que el Teorema 10 implica los resultados obtenidos por Verblunsky y Reuter ([V],[Re]) ya que:

- Con las hipótesis del teorema, Verblunsky estimó que

$$\int_{C_r} u(z) |dz| \leq \left(2 + \frac{r}{t} \right) \int_{\Gamma} u(z) |dz|$$

donde $t^{-1} = \sup_w k_w^{\text{ext}}$. Observamos que esto es consecuencia del teorema anterior porque en lugar del factor $\sin \left(\frac{\pi}{2} V_{C_r}(w) \right)$ aparece su cota superior 1.

- Anteriormente, Reuter había probado la estimación de Verblunsky para el caso particular en el que Γ es convexa (es decir, cuando $k_w^{\text{ext}} = 0$ para todo w , o, equivalentemente, cuando $r = \infty$).

Demostración. Podemos asumir que $\lambda = 1$ ya que u^λ es subarmónica siempre y cuando u sea positiva y subarmónica; en este caso:

$$\int_{C_r} u(z)|dz| = (2\pi r)u(0) \leq 2\pi r \int_{\Gamma} u(w)P_0^\Omega(w)|dw| \quad (4.5)$$

Fijamos $w \in \Omega$, y consideramos el radio de curvatura exterior t_w de Γ en el punto w ; para simplificar notación denotamos por:

$$\begin{aligned} t &= t_w \\ C_t &= C_{t_w}^w \text{ círculo tangente a } \Gamma \text{ en } w \text{ de radio } t_w \text{ contenido en } \Omega^c \\ E_t &= E_{t_w}^w \text{ el exterior de } C_t \end{aligned}$$

Como $\Omega \subset E_t$ (recuérdese §3.1):

$$P_0^\Omega(w) \leq P_0^{E_t}(w) \quad (4.6)$$

donde $P_0^{E_t}(w)$ es el núcleo de Poisson del dominio E_t evaluado en el punto 0.

Recordamos que si z_0 es el centro del círculo C_t ,

$$P_0^{E_t}(w) = \frac{1}{2\pi t} \frac{|z_0|^2 - t^2}{|z_0 + w|^2}.$$

Para mayorar este núcleo de Poisson y poder relacionarlo con el ángulo total, consideramos el ángulo θ entre la normal interior a Γ en w y el segmento que une w con 0. Un cálculo directo prueba que

$$P_0^{E_t}(w) \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 \cos \theta}{|w|} + \frac{1}{t} \right)$$

Ahora el ángulo total absoluto normalizado aparece de forma natural: como C_t es un círculo, es fácil ver que

$$V_{C_t}(w) = 4 \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{t}{|w|},$$

y por tanto

$$P_0^{E_t}(w) \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2 \cos \theta}{r} \sin \left(\frac{\pi}{2} V_{C_t} \right) + \frac{1}{t} \right]. \quad (4.7)$$

Con las estimaciones dadas en (4.6) y (4.7), y recordando la definición de curvatura exterior k_w^{ext} , nuestra desigualdad inicial (4.5) se convierte en

$$\begin{aligned}
2\pi r \int_{\Gamma} u(w) P_0^{\Omega}(w) |dw| &\leq \int_{\Gamma} 2\pi r u(w) P_0^{E_t}(w) \\
&\leq \int_{\Gamma} u(w) \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2} V_{C_t} \right) + r K_w^{\text{ext}} \right]
\end{aligned}$$

y el teorema se sigue.

Para ver por qué esto es lo mejor que se puede hacer para $\lambda = 1$, tómese como Ω el semiplano superior, y como γ el círculo centrado en $z = iL$ de radio $r = 1$, donde $L \gg 1$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} u(w) \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2} V_{C_r} \right) + r K_w^{\text{ext}} \right] |dw| \geq 2 \int_{\mathbb{R}} u(w) |dw| - \epsilon \quad \epsilon > 0$$

donde el número 2 es la constante estimada por Verblunsky y Reuter (para el caso Γ convexo, $t_w = \infty$ para todo $w \in \partial\mathbb{H}$)

□

∴

UNA CUESTIÓN ABIERTA.

Antes de terminar esta sección señalamos una vez más un detalle que nos parece de importancia: como hemos mencionado en las observaciones hechas después del Teorema 8, si γ es un segmento perpendicular a la curva Γ , la constante $K(\lambda, \Gamma)$ es finita si y sólo si $\lambda > 2$.

Sin embargo, hemos visto en el Teorema 10 que si γ es un círculo, la constante $K(\lambda, \Gamma)$ es finita para cualquier $\lambda \geq 1$. Así, el mejor exponente que da la constante finita es $\lambda = 1$. (De hecho, si Γ es el semiplano superior, el mejor exponente que da la constante de Gabriel finita para las curvas $\gamma(t) = (t, |t|^\alpha)$, $-1 \leq t \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, es ya $\lambda = 1$.)

Entender esto es una cuestión que está por dilucidar.

4.2 Funciones holomorfas

Es de especial interés considerar (G) cuando u es el módulo de una función holomorfa f . En esta sección calculamos primero la constante exacta para este caso, y después damos un ejemplo que da $K_{\Gamma}^{\infty} > 2$, probando que la conjetura de Gabriel es falsa (véase §4.2.2).

4.2.1 La constante exacta

Necesitamos la siguiente observación debida a Hayman [Ha] que muestra que estudiar el problema de Gabriel (G) para u positiva y subarmónica es equivalente a estudiar (G) para $u = |f|$, con f holomorfa y exponente 1 (véase la introducción):

Lema H *Para dos curvas de Jordan rectificables cualesquiera Γ y γ las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(A) *existe una constante C tal que para toda función armónica positiva u*

$$\int_{\gamma} e^{u(z)} |dz| \leq C \int_{\Gamma} e^{u(w)} V_{\gamma}(w) |dw|$$

(B) *existe una constante C tal que para todo polinomio P*

$$\int_{\gamma} |P(z)| |dz| \leq C \int_{\Gamma} |P(w)| V_{\gamma}(w) |dw|$$

Las constantes en (A) y (B) son las mismas.

(Hayman, [Ha], probó este resultado sin el peso V_{γ} y para γ un círculo, pero el enunciado de arriba se sigue exactamente de la misma manera).

Como (B) es cierto para todo polinomio, también lo es para funciones holomorfas en la clausura de Ω .

Ahora podemos establecer el resultado equivalente al Teorema 8 en este contexto:

Teorema 11 *Sean Γ, γ curvas de Jordan rectificables con γ contenida en Ω , y sea f una función holomorfa en Ω . Entonces,*

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq K(\infty, \Gamma) \int_{\Gamma} |f(w)| V_{\gamma}(w) |dw| \quad (4.8)$$

donde

$$K(\infty, \Gamma) = 2 \sup_{z \in \Gamma, v \in \mathbb{D}} K_{\Gamma}^{\infty}(z, v) \quad (4.9)$$

y esta cota es óptima; para cada curva Γ y γ hay una función f de forma que la igualdad se alcanza.

- Obsérvese que si la curva Γ es convexa, entonces $K(\infty, \Gamma) < \infty$ (véase §3.4.3).
- Aunque no será de interés para nosotros, cabe señalar que Gabriel [G1] probó que para Γ convexa,

$$\int_{\gamma} |f(w)|^{\mu} \leq A \int_{\Gamma} |f(w)|^{\mu} V_{\gamma}(w) |dw| \quad \forall \mu > 0$$

nótese que la restricción de $\lambda > 2$ que aparecía en las funciones sub-armónicas ha “mejorado” a $\mu > 0$.

Demostración. Por el Lema H es suficiente probar (4.8) para funciones de la forma $e^{u(z)}$ para u armónica y positiva. Se seguirá entonces para cualquier función holomorfa.

La estructura de la prueba es muy similar a la del Teorema 8: también probamos el teorema para γ un segmento, y lo hacemos usando la desigualdad de Jensen en lugar de la de Hölder.

La desigualdad (4.8) será cierta si y sólo si

$$e^{u(z)} \leq \frac{K(\infty, \Gamma)}{2} \int_{\Gamma} e^{u(w)} Q |dw|, \quad (4.10)$$

y esto es lo que probamos.

Recordamos que u es armónica y positiva; denotamos por v a su conjugada armónica y consideramos la función holomorfa $f = e^{u+iv}$. Como $u = \log |f|$ es armónica:

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{\Gamma} u(w) P_z^{\Omega}(w) |dw| \\ &= \int_{\Gamma} \left(u(w) + \log \left| \frac{Q}{P_z^{\Omega}(w)} \right| \right) P_z^{\Omega}(w) |dw| + \int_{\Gamma} \log \left| \frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right| P_z^{\Omega}(w) |dw| \end{aligned}$$

Tomando la exponencial primero y aplicando después la desigualdad de

Jensen

$$\begin{aligned}
 \exp \{u(z)\} &= \\
 &= \exp \left\{ \int_{\Gamma} \left(u(w) + \log \left| \frac{Q}{P_z^{\Omega}(w)} \right| \right) P_z^{\Omega}(w) |dw| \right\} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ \int_{\Gamma} \log \left| \frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right| P_z^{\Omega}(w) |dw| \right\} \\
 &\leq \int_{\Gamma} \exp \{u(w)\} Q |dw| \\
 &\quad \times \exp \left\{ \int_{\Gamma} \log \left| \frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right| P_z^{\Omega}(w) |dw| \right\}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por tanto, para funciones de la forma $e^{u(z)}$ obtenemos

$$\frac{K(\infty, \Gamma)}{2} = \sup_{z, \mathbf{v}} \exp \int_{\Gamma} \log \left(\frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right) P_z^{\Omega}(w) |dw|,$$

lo cual prueba el teorema.

La constante es óptima. Para ver esto, para cada $z \in \Omega$ y cada dirección \mathbf{v} consideramos \mathbb{H}_z , definimos

$$A_z(\mathbf{v}) = \{ \xi \in \Gamma : |\xi - a| < 10^{-10} \text{ para todo } a \in \Gamma \cap \partial \mathbb{H}_z \},$$

y consideramos las funciones:

$$\begin{aligned}
 h(w) &= \chi_{\Gamma \setminus A_z} \log \left(\frac{P_z^{\Omega}(w)}{Q} \right), \\
 u(z) &= P^{\Omega}[h] \text{ (es decir, } u \text{ es la función armónica en } \Omega \text{ con valores frontera } h), \\
 \tilde{u} &= \text{conjugada armónica de } u.
 \end{aligned}$$

Entonces para $f(z) = e^{u+i\tilde{u}}$ tenemos igualdad en (4.11).

□

4.2.2 El contraejemplo a la conjetura de Gabriel

Como señalamos después del Teorema 11, Gabriel probó que para todo $\mu > 0$,

$$\int_{\gamma} |f(w)|^{\mu} \leq A \int_{\Gamma} |f(w)|^{\mu} V_{\gamma}(w) |dw|,$$

y conjeturó que la constante A podía ser reemplazada por un 2. En esta sección damos un ejemplo que prueba que la conjetura no es cierta y lo hacemos para el caso particular $\mu = 1$, que es el de interés para nosotros.

Será conveniente para esta sección recordar que, por el Lema 11 (véase la página 84):

$$K_F^\infty(z, \mathbf{v}) = \exp K(\Omega, z, \mathbf{v}) = \exp \int_\Gamma \log \frac{1}{|2 \sin \psi|} d\omega_z^\Omega.$$

donde ψ es el ángulo entre el segmento que va de z a w y la tangente a γ en z , y donde $d\omega_z^\Omega$ denota la medida armónica en Ω .

Consideramos como dominio Ω la banda $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < 2\}$, el punto $z = 0$, la dirección $\mathbf{v} = (1, 0)$, y los conjuntos en la frontera de la banda dados por

$$\begin{aligned} A &= \{w \in \partial\Omega : w = 2 + iy, |y| < \frac{2}{\sqrt{3}}\} \\ D &= \partial\Omega \setminus A \end{aligned} \quad (4.12)$$

(esto es, A es el conjunto de puntos donde $\log \frac{1}{|2 \sin \psi|}$ es positivo, y D donde es negativo). Parece claro que desde el punto $z = 0$, A tiene más medida armónica que D , es decir, es más probable llegar a A antes que a D desde 0. Esta es la razón por la que $K(\Omega, 0, \mathbf{v})$ debería ser positivo (notamos que \mathbf{v} apunta en la dirección x), y por tanto $K_F^\infty(0, \mathbf{v}) > 1$, y finalmente, $K(\infty, \Gamma) > 2$.

Procedemos a establecer este resultado de forma precisa, y lo hacemos de dos maneras distintas: en la primera hacemos un sencillo cálculo, mientras que en la segunda, más intuitiva, usamos el hecho dado por el lema 12 (página 88) de que si el funcional $K(\Omega, z, \mathbf{v})$ no es 0 en todas las direcciones, entonces es que es (estrictamente) positivo en alguna.

FORMA PRIMERA.

Consideramos la banda $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < 2\}$, $z = 0$, la curva γ y el segmento $[-1, 1]$.

Por simetría

$$\begin{aligned} \log K_{\partial\Omega}^\infty(0, (1, 0)) &= \\ &= 4 \int_0^\infty P_0^B(2 + iy) \log P_0^B(2 + iy) dy + 4 \int_0^\infty P_0^B(2 + iy) \log \frac{1}{Q} dy \\ &= 4A + 4B, \end{aligned} \quad (4.13)$$

y será suficiente probar que $A + B > 0$ para terminar el contraejemplo.

Estimamos primero A : como vimos en la prueba del Lema 11. página 84

$$4A = \log \frac{1}{2\pi|H'(0)|}$$

donde H es la función conforme $H: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ con $H(0) = 0$, esto es,

$$H(z) = \frac{4}{\pi} \log \frac{1+z}{1-z},$$

y por tanto

$$A = \log \frac{1}{2}.$$

Para estimar B , observamos que $P_0^B(2+iy) = \frac{1}{8} \frac{1}{\cosh(y\pi/4)}$. Tenemos por tanto:

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\infty \frac{1}{8} \frac{1}{\cosh(y\pi/4)} \log \frac{\pi(y^2+4)}{y} dy \\ &= \log \left(\left[\frac{8}{\pi} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\Gamma(z)$ es la función Gamma (véase, por ejemplo, [GR, pág. 942]).

Sumando A y B obtenemos:

$$A + B = \log \left(\left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \sim 0.083 > 0, \quad (4.15)$$

que prueba que $K(\infty, \Gamma) \geq 2K_{\partial\Omega}^\infty(0, (1, 0)) \geq 2 \exp(4A + 4B) > 2$.

FORMA SEGUNDA.

De manera alternativa podemos proceder como sigue:

Recuérdese el Lema 12 de la sección §3.4 que establece (con la notación de allí) que la constante $K(\Omega, z, \mathbf{v}) = \log K_{\partial\Omega}^\infty(0, \mathbf{v})$ o es idénticamente cero, o en alguna dirección ha de ser estrictamente positiva.

Sí tomamos la dirección $\mathbf{v} = (0, 1)$ (esto es, \mathbf{v} apunta en la dirección y), observamos que $K(\partial B, 0, \mathbf{v}) < 0$; es decir, hay una dirección en la que no es cero, y por tanto debe haber otra en la que sea positiva.

Capítulo 5

Aplicaciones conformes: el problema de Hayman-Wu

5.1 Como hemos visto en la primera parte de esta memoria (capítulo 2, página 34), Hayman y Wu consideraron el problema siguiente:

Dado un dominio simplemente conexo Ω acotado por una curva (de Jordan) rectificable Γ , encuéntrase la mejor constante \tilde{C} de manera que para toda línea recta L (o círculo) y para cualquier función conforme f de Ω sobre el disco unidad \mathbb{D} :

$$\int_{L \cap \Omega} |f'(z)| |dz| \leq \tilde{C} \int_{\Gamma} |f'(z)| |dz| \quad (5.1)$$

esto es, $\text{longitud}(f(L \cap \Omega)) \leq \tilde{C} \times \text{longitud}(\partial \mathbb{D})$.

Observamos que, como el problema es invariante bajo transformaciones de Möbius, los círculos y las rectas juegan el mismo papel; observamos también que en (5.1) no interviene el ángulo total.

Para el resto de la sección, Ω , Γ , y L serán como acabamos de definir arriba.

Diversos autores han estudiado el problema (5.1) para curvas más generales que rectas; de hecho, Bishop y Jones [BJ] han caracterizado las curvas con la propiedad de que exista una constante M tal que (5.1) sea cierta para todo dominio Ω y toda aplicación conforme f de Ω sobre \mathbb{D} , como las curvas regulares Ahlfors.

Parece natural preguntarse cuando es cierto (5.1) si consideramos el ángulo total con el que vemos L desde Γ , y también, para qué curvas γ más generales sería cierto dicho resultado.

En este capítulo respondemos a esta pregunta, es decir, estudiamos el siguiente problema (al que nos referimos como (P)):

Para qué curvas de Jordan rectificables Γ y γ , con γ en el interior de Γ existe una constante universal M tal que para toda función conforme f de Ω sobre \mathbb{D}

$$\int_{\gamma} |f'(z)| |dz| \leq M \int_{\Gamma} |f'(z)| V_{\gamma}(z) |dz|? \quad (\text{P})$$

Es importante señalar que este problema no es invariante bajo transformaciones de Möbius (en particular, círculos y rectas no son equivalentes en este caso).

Otra pregunta natural sobre el problema (5.1) es la de si se puede generalizar en el sentido de considerar funciones holomorfas cualesquiera y no sólo la derivada de funciones conformes. Como la longitud de arco es una medida de Carleson, la respuesta, afirmativa, es inmediata (veremos más adelante un Teorema de Hayman y Hall en el que se halla una constante \tilde{C} buena para el caso en que $L \subset \Omega$).

Aquí consideramos también esta pregunta para el problema (P) y damos una respuesta parcial (ver sección §5.4). Obsérvese que esto supone un retorno al problema de Gabriel.

La estructura del capítulo es la siguiente: exponemos primero una generalización de (5.1) a funciones holomorfas cuando $L \subset \Omega$ debida a Hayman y Hall, y procedemos después a contestar (P) en tres secciones dependiendo de la geometría de las curvas γ y Γ ; finalmente vemos cuando (P) se puede generalizar a funciones holomorfas.

5.2 Hayman and Hall [HH] generalizaron el resultado de B. Brown (véase el capítulo 2, página 34) en el sentido que ellos consideraron funciones holomorfas en general y no sólo la derivada de funciones conformes. Observamos que no aparece ningún peso en la integral del lado derecho de (5.1):

Teorema HH *Sea Γ una curva de Jordan rectificable cuyo interior Ω contiene un círculo C ; entonces, para cualquier función holomorfa f*

$$\int_C |f(z)| |dz| \leq 4\pi \int_{\Gamma} |f(z)| |dz|$$

Excepto por la constante, este resultado es un corolario del teorema de Hayman-Wu y la caracterización de medidas de Carleson en términos del grupo de Möbius (véase [Ga, pág. 239] y la prueba que daremos a continuación). La prueba dada en [HH] es más complicada pero proporciona una constante mejor, y el interés principal estriba, precisamente, en hallar la mejor constante.

Demostración. Sea ψ una aplicación conforme cualquiera de Ω sobre \mathbb{D} . Entonces, por el resultado de B. Brown (capítulo 2, página 34) y por invarianza conforme,

$$\text{longitud}(\psi(C)) \leq \pi^2,$$

o dicho de otra manera

$$\int_C |\psi'(z)| |dz| \leq \frac{\pi}{2} \int_{\Gamma} |\psi'(z)| |dz|.$$

Sea T una transformación de Möbius sobre \mathbb{D} ; aplicando la desigualdad anterior a la función $T \circ \psi$ se deduce que

$$\int_{\psi(C)} |T'(z)| |dz| \leq \frac{\pi}{2} \int_{\partial \mathbb{D}} |T'(z)| |dz|.$$

Una vez que tenemos una estimación como la de arriba, un resultado de Treil y Volberg [TV] sobre la estimación de la norma de una medida de Carleson, aplicada a la longitud de arco sobre $\psi(C)$, nos permite concluir que tenemos una estimación para funciones holomorfas con la constante incrementada por un factor 8, es decir

$$\int_{\psi(C)} |f(z)| |dz| \leq \frac{8\pi}{2} \int_{\partial \mathbb{D}} |f(z)| |dz|,$$

para toda función f holomorfa sobre la clausura de \mathbb{D} . Se sigue así el resultado.

□

COMENTARIOS:

- Hayman y Hall [HH] dieron una prueba diferente y la constante que obtuvieron es $(3 + \frac{4}{\pi})e$ (observamos que ésta es menor que la obtenida aquí, 4π).
- La constante de Hayman y Hall no es óptima.
- En el caso convexo (con la curva C un segmento), usando el resultado del Teorema 4 y la prueba dada arriba obtenemos la constante 8. Ésta no es la mejor constante: como ya vimos (Teorema B, página 45), Beurling probó que la mejor constante en este caso es 1 y es óptima ([B, pág. 457]).
Obsérvese que ésta es una generalización del Teorema clásico de Féjer y Riesz.

En las tres subsecciones siguientes estudiamos el problema (P) dependiendo primero de la geometría de la curva γ y después de la de Γ .

5.1 γ es una línea recta

Damos un ejemplo que muestra que en este caso, a diferencia de lo que sucede cuando no hay ángulo total (Teorema de Hayman-Wu, sección §2.1), no hay cota universal para el problema (P); es decir, no existe una constante finita M independiente de la curva Γ .

En el resto de la sección denotamos a γ por L .

La idea clave en el ejemplo es la de construir una familia creciente de dominios de manera que, en el dominio límite, “casi todos” los puntos de la frontera “vean” a la recta L con ángulo casi cero.

El ejemplo es el siguiente: tomamos R_n como el rayo que parte de 0 con dirección $\frac{2\pi}{n}$, y tomamos Γ_n como $\Gamma_n = R_n \cup R_{-n}$. L será el segmento $(-\infty, 0)$ (véase la Figura 36).

Sea ahora f_n una aplicación conforme de $\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| > \frac{2\pi}{n}\}$ sobre el disco unidad \mathbb{D} con $f_n(L) = (-1, 1)$. Entonces,

$$\text{longitud}(f_n(L)) = \int_L |f'_n(z)| |dz| = 2 \quad \text{para todo } n$$

Como $f' \in L^1(\Gamma_n)$ para cada Γ_n hay una constante $M(\Gamma_n)$ finita que verifica (P), pero como $V_{(-\infty,0)}(w) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $w \in \Gamma_n$,

$$\int_{\Gamma_n} |f'(z)| V_{(-\infty,0)}(z) |dz| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

y por tanto no existe una constante universal finita M que satisfaga (P).

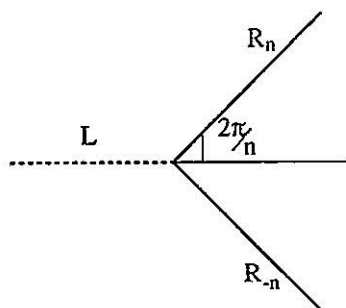


Figura 36

5.2 Aplicaciones conformes y dominios que no pueden ser pinchados

Como hemos observado en la sección anterior, no hay una constante finita M para el problema (P) en general (ni tan siquiera para segmentos γ).

Recordamos que la razón por la que esta constante no existe está en la geometría de la frontera del dominio límite. Esta geometría permitía que el ángulo con el que la curva γ se veía desde muchos puntos de la frontera, fuese prácticamente cero. Es necesario por tanto imponer condiciones sobre la geometría de la curva Γ que garanticen que desde la frontera, la curva γ se vea con ángulo “suficientemente” grande para que (P) sea cierto para alguna constante finita M .

En esta sección describimos una clase de dominios para los cuales obtendremos un resultado positivo. Nos referimos a estos dominios diciendo que no pueden ser pinchados.

Antes de definir con precisión los dominios que no pueden ser pinchados, quiero agradecer al profesor S. Rohde su ayuda con la descripción euclídea de los mismos.

La siguiente notación resulta conveniente para describir los dominios de interés:

Sectores. Para un $R > 1$ fijo, $0 < \eta < \pi$ y para cualquier $z \in \Omega$, $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, definimos

$$S(z, e^{i\theta}, R, \eta) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \delta_\Omega(z) \leq |w - z| < R\delta_\Omega(z), |\arg(w - z)e^{-i\theta}| < \frac{\eta}{2} \right\}$$

donde $\delta_\Omega(z)$ denota la distancia euclídea del punto z a la frontera del dominio Ω .

Ojo de cerradura. Lo definimos como la región

$$K(z, e^{i\theta}, R, \eta) = S(z, e^{i\theta}, R, \eta) \cup \mathbb{D}(z, \delta_\Omega(z))$$

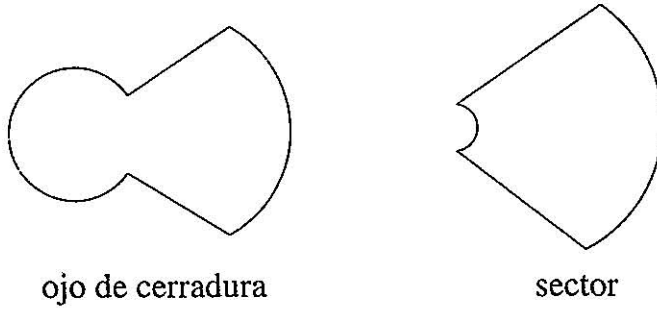


Figura 37

Decimos que el dominio Ω *no puede ser pinchado* si existe un $R > 1$ tal que para todo $z \in \Omega$ y todo $\xi \in \partial\Omega$ con $|z - \xi| = \delta_\Omega(z)$ tenemos que

$$\{w \in \partial\Omega : \delta_\Omega(z) \leq |z - w| \leq R\delta_\Omega(z)\} \setminus S(z, e^{i\theta}, R, \frac{1}{R}) \neq \emptyset$$

donde $\xi = z + e^{i\theta}\delta_\Omega(z)$

Esta condición simplemente dice que hay un punto de $\partial\Omega$ en el anillo centrado en z de radios $\delta_\Omega(z)$ y $R\delta_\Omega(z)$ que está lejos del rayo que parte de z en la dirección de ξ . (Véase la Figura 38.)

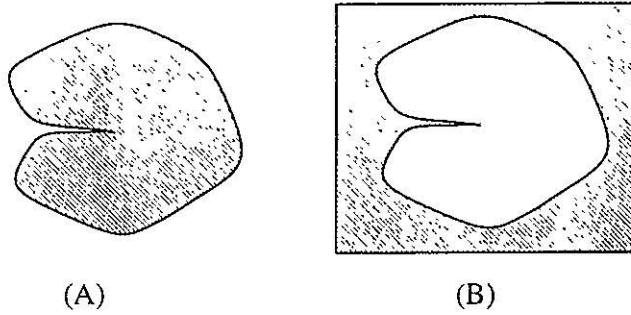


Figura 38

(el dominio (A) puede ser pinchado y el (B) no).

Necesitamos caracterizar los dominios que no pueden ser pinchados en términos de la medida armónica; el siguiente lema nos sirve como herramienta para tal fin:

Lema 14 Si $z \in \Omega$ y $w \in \partial\Omega$ (digamos $w = z + te^{i\theta}$, $|w - z| \leq R\delta_\Omega(z)$) entonces

$$\omega(z, \partial\Omega \cap S(z, e^{i\theta}, 2R, \eta), K(z, e^{i\theta}, 2R, \eta)) \geq \Psi(R, \eta)$$

donde Ψ es cierta función universal continua y positiva definida para $R > 1$ y $0 < \eta < \pi$.

Este lema es una consecuencia inmediata del Teorema de Proyección de Beurling ([A2, pag. 43]).

Damos ahora la caracterización en términos de medida armónica:

Lema 15 Con la notación dada arriba, las dos condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) Ω no puede ser pinchado
- (b) Para $0 < \eta < \pi$ fijo, $R > 1$, existe una constante absoluta c_0 tal que para todo $z \in \Omega$, existe una dirección $e^{i\theta}$ tal que

$$\omega(z, S(z, e^{i\theta}, R, \eta) \cap \partial\Omega, \Omega) \geq c_0$$

y uno de los puntos más cercanos a la frontera está fuera del sector $S(z, e^{i\theta}, R, \eta)$. Esto es, existe $\xi \in \partial\Omega$ con $\xi = z + e^{i\alpha}$ donde $|\theta - \alpha| > \eta$.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b) se sigue directamente del lema anterior con $\eta = \frac{1}{R}$.

(b) \Rightarrow (a) también es inmediato porque si

$$\omega\left(z, S(z, e^{i\theta}, R, \eta) \cap \partial\Omega, \Omega\right) \geq c_0,$$

entonces

$$\{w \in \partial\Omega : \delta_\Omega(z) \leq |z - w| \leq R\delta_\Omega(z)\} \setminus S(z, e^{i\alpha}, R, \frac{1}{R}) \neq \emptyset,$$

donde ξ es uno de los puntos más cercanos a la frontera, que puede ser escrito como $\xi = z + e^{i\alpha}\delta_\Omega(z)$

□

Ejemplos de dominios simplemente conexos que no pueden ser pinchados son los linealmente conexos, localmente linealmente conexos, o aquellos cuyo complementario satisface la llamada *condición del sacacorchos* ("corkscrew condition") ([P, pág. 103], [Ge] y [JK] respectivamente).

Sin embargo, como el siguiente ejemplo muestra, existen dominios que no pueden ser pinchados que ni son (localmente) linealmente conexos, ni tienen un complementario que satisfaga la condición del sacacorchos: tomamos direcciones θ_n en el disco unidad dadas por $\theta_n = \frac{\pi}{n}$, y alrededor de cada dirección θ_n tomamos una región

$$R_n = \left\{ z \in \mathbb{D} : |z| > 1/2, |\arg z - \theta_n| < \frac{\theta_n - \theta_{n+1}}{4} \right\};$$

tomamos ahora el dominio Ω como $\Omega = \mathbb{D} \setminus \overline{\bigcup_{n \geq 1} R_n}$ (esto es, estamos quitando del disco unidad una colección contable de sectores manteniendo la altura fija y estrechando la base).

Este dominio Ω no puede ser pinchado, pero no es ni linealmente conexo, ni localmente linealmente conexo (obsérvese que las dos condiciones necesarias para que un conjunto tenga esta propiedad fallan), y su complementario $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ tampoco satisface la "condición del sacacorchos".

5.3 Un Teorema de Hayman-Wu con el ángulo total

Procedemos a enunciar el teorema que contesta (P):

Teorema 12 *Sea Ω un dominio de Jordan que no puede ser pinchado, $\Gamma = \partial\Omega$, y sea γ una curva de Jordan rectificable contenida en Ω . Entonces, para cualquier función conforme f de Ω sobre el disco unidad \mathbb{D}*

$$\text{longitud}(f(\gamma)) = \int_{\gamma} |f'(z)| |dz| \leq M \int_{\Gamma} |f'(z)| V_{\gamma}(z) |dz| \quad (5.2)$$

donde M depende sólo de la constante R asociada al dominio Ω .

La razón por la que este teorema es cierto es que el hecho de que el dominio no pueda ser pinchado evita que haya “muchos” puntos de la frontera de Ω desde los que el ángulo total es cero; es decir, si para cada $z \in \gamma$ podemos encontrar dos conjuntos “grandes” y “alejados” de frontera de forma que la probabilidad de llegar desde z a ellos antes que al resto del borde es 1, los puntos w que están en estos conjuntos ven la curva γ (en realidad a un conjunto de γ cercano a z) con ángulo “grande”. Es el juego, una vez más, de “invertir” la función que asocia conjuntos de la frontera a intervalos de γ (véase la sección §2.1, página 40).

Demostración.

Como γ es rectificable y ambos lados de la ecuación (5.2) son aditivos en γ , basta probar (5.2) para un segmento, digamos L .

Recordamos que dado un $w \in \partial\Omega$ y una dirección \mathbf{v} , definimos Q como el núcleo de Poisson del semiplano que tiene por frontera a la recta cuya tangente es \mathbf{v} y que contiene al punto w (este uso de Q es un pequeño abuso de notación).

Como en la prueba del Teorema 8 (página 97) sólo tenemos que probar que

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{2} \int_{\Gamma} |f'(w)| Q(w) |dw| \quad (5.3)$$

Aunque la dirección \mathbf{v} no aparece explícitamente, desempeña un papel fundamental en (5.3) ya que Q depende de \mathbf{v} .

Sin pérdida de generalidad, tomamos el punto z como $z = 0$, la distancia euclídea de 0 a $\partial\Omega$ como 1, y el punto $w \in \partial\Omega$ más cercano a 0 como $w = 1$.

Como el dominio Ω no puede ser pinchado, para un η fijo con $0 < \eta < \pi$, $R > 1$, existe una dirección $e^{i\theta}$, $|\theta| > \eta$, y una constante $c_0 > 0$ tal que $\omega(z, \Gamma \cap S(0, e^{i\theta}, R, \eta), \Omega) \geq c_0$ (véase el Lema 15, sección 5.2).

Introducimos la siguiente notación:

- $S(\theta) = S(0, e^{i\theta}, R, \eta)$.
- $\Gamma^\theta = \Gamma \cap S(\theta)$
- $\Gamma^0 = \Gamma \cap S(0)$
- $\Gamma^{\theta,0} =$ o bien Γ^θ o bien Γ^0 (esto es, si $\Gamma^{\theta,0}$ aparece en una fórmula, es que ésta es cierta para cualquiera de las dos curvas).

Será conveniente expresar algunas de las estimaciones en términos de la *geometría de Poincaré* de Ω . Recuérdese que la densidad λ_Ω de la métrica de Poincaré de Ω está dada por

$$\lambda_\Omega(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(g(z))|g'(z)|$$

donde g es una aplicación conforme de Ω sobre \mathbb{D} .

La *distancia de Poincaré* entre dos puntos p, q en Ω se denota por $d_\Omega(p, q)$.

Dividimos el resto de la prueba en dos pasos: en el primero transformamos el problema en uno conformemente invariante, mediante la estimación de Q , y en el segundo paso reescribimos el problema en términos de cantidades conformemente invariantes.

PASO I. Reducimos el problema a probar que $|f'(0)| \leq C_1 \int_{\Gamma^{\theta,0}} |f'(z)| |dz|$.

Obsérvese que :

$$\int_{\Gamma} |f'(z)| |Q| |dz| \geq \int_{\Gamma^\theta \cup \Gamma^0} |f'(z)| |Q| |dz|$$

Así que basta acotar Q por debajo. El control sobre Q depende de la posición relativa de v y el segmento $[0, 1]$.

Debemos considerar dos casos para v :

caso 1: $|\mathbf{v} - \theta| \leq \frac{\eta}{2}$. En este caso la dirección \mathbf{v} puede estar cerca de $\arg w$ para $w \in \Gamma^\theta$ y por tanto Q puede ser arbitrariamente pequeño sobre Γ^θ , pero los argumentos de los puntos $w \in \Gamma^0$ están lejos de la dirección \mathbf{v} , y por tanto se ve fácilmente que

$$\int_{\Gamma^\theta \cup \Gamma^0} |f'(z)|Q|dz| \geq \int_{\Gamma^0} |f'(z)|Q|dz| \geq c(\eta, R) \int_{\Gamma^0} |f'(z)||dz|$$

caso 2: $|\mathbf{v} - \theta| > \frac{\eta}{2}$. Como en el caso 1, los argumentos de los puntos $w \in \Gamma^\theta$ están lejos de la dirección \mathbf{v} , y por tanto

$$\int_{\Gamma^\theta \cup \Gamma^0} |f'(z)|Q|dz| \geq \int_{\Gamma^\theta} |f'(z)|Q|dz| \geq c(\eta, R) \int_{\Gamma^\theta} |f'(z)||dz|$$

Por tanto

$$\int_{\Gamma} |f'(z)|Q|dz| \geq C \int_{\Gamma^{\theta,0}} |f'(z)||dz|$$

y es suficiente probar

$$|f'(0)| \leq C_1 \int_{\Gamma^{\theta,0}} |f'(z)||dz| \quad (5.4)$$

PASO II. Vamos a reescribir (5.4) en términos de cantidades conformemente invariantes.

Observamos que el lado derecho de (5.4) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{\theta,0}} |f'(z)||dz| &= \text{longitud}(f(\Gamma^{\theta,0})) \\ &= 2\pi\omega(0, f(\Gamma^{\theta,0}), \mathbb{D}) = 2\pi\omega(f^{-1}(0), \Gamma^{\theta,0}, \Omega) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Cuando no dé lugar a confusión, escribiremos $\omega(z, A, \Omega)$ como $\omega(z, A)$.

En lo que queda de prueba denotaremos $f^{-1}(0)$ por a .

Observamos ahora que el lado izquierdo de (5.4) es

$$|f'(0)| = \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(f(0))}{\lambda_{\Omega}(0)}$$

Para terminar la prueba queremos relacionar $\frac{\lambda_{\mathbb{D}}(f(0))}{\lambda_{\Omega}(0)}$ y $\omega(a, \Gamma^{\theta,0})$; para ello debemos considerar dos casos dependiendo de la distancia hiperbólica entre a y 0 .

Caso 1: $d_{\Omega}(0, a) \leq 1$

Por un lado, debido a la desigualdad de Harnack

$$\omega(a, \Gamma^{\theta, 0}) \geq \omega(0, \Gamma^{\theta, 0}) e^{-d_{\Omega}(0, a)} \geq c_0 e^{-1}$$

Por otro, aplicando el Teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \frac{\lambda_{\mathbb{D}}(f(0))}{\lambda_{\Omega}(0)} \leq 4d(0, \partial\Omega) \lambda_{\mathbb{D}}(f(0)) \\ &= \frac{8}{1 - |f(0)|^2} \leq 8e, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho de que

$$\frac{1 + |f(0)|}{1 - |f(0)|} = e^{d_{\mathbb{D}}(f(0), 0)} = e^{d_{\Omega}(0, a)} \leq e$$

Así

$$|f'(0)| \leq C_1 \int_{\Gamma^{\theta, 0}} |f'(z)| |dz|,$$

y se sigue el teorema.

Caso 2. $d_{\Omega}(0, a) \geq 1$

Observamos primero que como $\delta_{\Omega}(0) = 1$, entonces

$$|f'(0)| \leq C g_{\Omega}(0, a),$$

donde $g_{\Omega}(z, a)$ es la función de Green de Ω con polo en a .

En este caso queremos relacionar $g_{\Omega}(0, a)$ con $\omega(a, \Gamma^{\theta, 0})$; el siguiente lema lo hace:

Lema 16 *Sea u una función armónica y positiva en Ω .*

Entonces, para todo par de puntos $q, p \in \Omega$ tales que $d_{\Omega}(p, q) \geq 1$ se verifica que

$$u(q) \geq c g_{\Omega}(p, q) u(p)$$

Este lema se sigue inmediatamente de la desigualdad de Harnack y un mayorante armónico en el anillo $\{\xi \in \Omega : d_{\Omega}(\xi, p) > 1\}$.

El teorema se prueba ahora fácilmente: tomamos la función u como $u(z) = \omega(z, \Gamma^{\theta, 0})$. Recuérdese que $u(0) \geq c_0$; aplicamos el lema con $p = a$, $q = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leq Cg(0, a) \leq C \frac{u(a)}{u(0)} \\ &\leq Cu(a) \leq C \int_{\Gamma^{\theta, 0}} |f'(w)| |dw| \end{aligned}$$

Esto prueba el teorema. \square

5.4 Paso a funciones holomorfas

Sea Ω un dominio de Jordan, con $\Gamma = \partial\Omega$, y Sea γ una curva cualquiera rectificable contenida en Ω . Consideramos estas dos posibles propiedades:

- (A) existe una constante finita K tal que para cualquier aplicación conforme ψ de Ω sobre \mathbb{D}

$$\int_{\gamma} |\psi'(z)| |dz| \leq K(\Gamma) \int_{\Gamma} |\psi'(z)| V_{\gamma}(z) |dz| \quad (5.6)$$

- (B) existe una constante finita \tilde{K} tal que para cualquier función holomorfa f

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \tilde{K}(\Gamma) \int_{\Gamma} |f(z)| V_{\gamma}(z) |dz| \quad (5.7)$$

En las secciones anteriores hemos dado una respuesta a la situación (5.6). Consideramos aquí la (5.7) y vemos cuando ésta es cierta.

• Si Ω no puede ser pinchado hemos visto en el Teorema 12 que (5.6) es cierto, sin embargo (5.7) es falso como muestra el siguiente ejemplo:

Sea $\mathbb{D}(2, 1)$ el círculo centrado en 2 de radio 1, y sea R la región

$$R = \left\{ z \in \mathbb{C} : 2 \leq \Re z < \infty, \quad -e^{-\Re z} < \Im z < e^{-\Re z} \right\}$$

(esto es, R es la región comprendida entre las gráficas $y = -e^{-x}$ y $y = e^{-x}$ para $x \geq 2$).

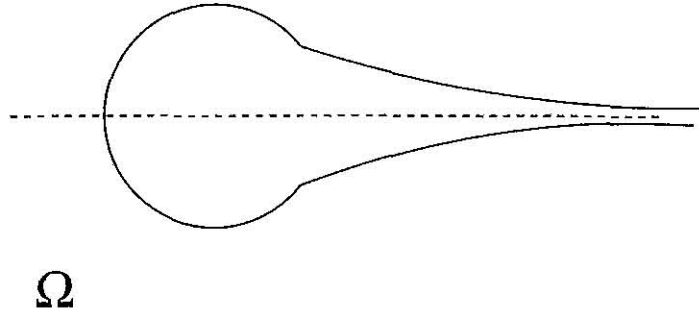


Figura 39

Sea Ω el dominio $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{R \cup \mathbb{D}})$ (obsérvese que Ω no puede ser pinchado). Tómesese Γ como la frontera de Ω .

Recuérdese (ver la prueba del Teorema 8, página 97) que encontrar la constante \tilde{K} en (5.7) es equivalente a encontrar la constante C de forma que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{2} \int_{\Gamma} |f(w)| Q |dw| \quad (5.8)$$

para todo punto $z \in \gamma$ y dirección v (recuérdese que Q es el núcleo de Poisson del semiplano que tiene por frontera la recta con dirección v y que contiene al punto w).

Sea $z = 0 \in \gamma$ y $v = (1, 0)$ (esto es, v es la dirección del eje real). Fijemos L grande. Sea h la función sobre Ω cuyos valores vienen dados en la figura siguiente:

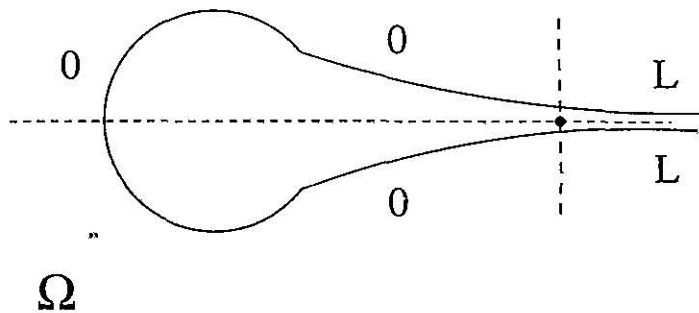


Figura 40

donde

$$C_L = (\partial\mathbb{D}(2,1) \cap \Gamma) \cup (\{\xi \in \partial R : 2 < \Re \xi < L\} \cap \Gamma)$$

$$R_L = \{\xi \in \partial R : \Re \xi \geq L\} \cap \Gamma;$$

Tomamos la función armónica u como la integral de Poisson de h , y la función holomorfa f con módulo $|f(z)| = \exp u(z)$. Entonces,

(a) el lado izquierdo de (5.8) es

$$|f(0)| = e^{L \omega(0, S_L, \Omega)} \approx e^{L/2}$$

(b) para estimar el lado derecho de (5.8), escribimos la curva Γ como

$$\Gamma = C_L \cup R_L$$

$$\subset \partial\mathbb{D}(2,1) \cup (\{\xi \in \partial R : 2 < \Re \xi < L\} \cap \Gamma) \cup R_L$$

y estimamos Q en cada uno de ellos:

La primera es fácil pues $|f(w)| = 1$ y $Q \leq 1$, y por tanto

$$\int_{\partial\mathbb{D}(2,1)} |f(w)|Q|dw| \leq 2\pi;$$

Para la segunda curva observamos que $Q = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-x}}{x^2 + e^{-2x}}$ y que $|f(w)| = 1$; un sencillo cálculo prueba ahora que

$$2 \int_2^L |f(w)|Q|dw| \leq C(e^{-2} - e^{-L});$$

finalmente, sobre la tercera curva $|f(w)| = e^L$ y Q es como en el caso anterior, así,

$$2 \int_L^\infty |f(w)|Q|dw| \leq C \frac{\sqrt{1 + e^{-2L}}}{L^2};$$

por tanto:

$$\frac{|f(0)|}{\int_\Gamma |f(w)|Q|dw|} \geq \frac{Ce^{L/2}}{1 + e^{-L} + L^{-2}\sqrt{1 + e^{-2L}}} \rightarrow \infty \text{ cuando } L \rightarrow \infty$$

y la constante C puede ser tan grande como queramos, por tanto no existe un constante finita \tilde{K} en (5.7).

- Obsérvese que a pesar de que (5.6) y (5.7) son dos problemas diferentes en este contexto, sin el ángulo total V serían el mismo problema (ya que la longitud de arco sobre γ es una medida de Carleson). Recuérdese que en este caso Hayman y Hall encontraron la mejor constante conocida.

- Para el caso particular de $\Omega = \mathbb{D}$, (5.7) es cierto por Carlson (ver capítulo 5, página 96).

- Aún no se ha descrito una caracterización de los dominios Ω para los que (5.7) es cierto (o una condición suficiente razonable).

Bibliografía

- [A1] L.V. AHLFORS, *Geodesic curvature and area*, Collected Papers, 2, 194-201.
- [A2] L.V. AHLFORS, *Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, (1973)
- [B] A. BEURLING, *Collected Works of Arne Beurling*, Birkhäuser Verlag, 1, (1989).
- [BJ] C.J. BISHOP, P.W. JONES, *Harmonic measure and arclength*, Ann. of Math., 2, 132, (1990), 511-547.
- [BO] B. BROWN-FLINN, B.G. OSGOOD, *Hyperbolic curvature and conformal mapping*, Bull. London Math. Soc., 18, (1986), 272-276.
- [Ca] F. CARLSON, *Quelques inégalités concernant les fonctions analytiques*, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Band 29 B, 11, (1943).
- [Ch] S.S. CHERN, *Studies in Global Geometry and Analysis*, MAA Studies in Mathematics. Mathematical Association of America, 4, (1967).
- [DoC] M. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc, (1970).
- [F] P.C. FENTON, *Line integrals of subharmonic functions*, Jour. Math. Anal. and Appl., 168, (1992), 108-110.
- [FH] J.L. FERNÁNDEZ, D.H. HAMILTON, *Length of curves under conformal mappings*, Comment. Math. Helv, 62, (1987), 122-134.
- [FHM] J.L. FERNÁNDEZ, J. HEINONEN, O. MARTIO, *Quasilines and conformal mappings*, J. Analyse Math., 52, (1989), 117-132.
- [FR] P.L. DUREN, *Theory of H^p Spaces*, Pure and Applied Math., Academic Press, 38, (1970).
- [G1] R.M. GABRIEL, *Some inequalities concerning 2-dimensional and 3-dimensional subharmonic functions*, Jour. London Math. Soc., 24, (1949), 154-156.

- [G2] R.M. GABRIEL, *A note upon functions subharmonic inside and on a closed convex curve*, Jour. London Math. Soc., **21**, (1946), 87-90.
- [G3] R.M. GABRIEL, *Some further results concerning the integrals of moduli of regular functions along curves of certain types*, Proc. Cambridge Phill. Soc., **25**, (1929), 139-144.
- [Ga] J.B. GARNETT, *Bounded Analytic Functions*, Pure and Applied Math., Academic Press, **96**, (1981).
- [Ge] T.E. GERASCH, *On the accesibility of the boundary of a simply connected domain*, Michigan Math. J, **33**, (1986), 201-207.
- [GGJ] J.B. GARNETT, F.W. GEHRING, P.W. JONES, *Conformally invariant length sums*, Indiana Univ. Math. J., **32**, (1983), 809-829.
- [GR] I.S GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, (1996).
- [Ha] W.K. HAYMAN, *Integrals of subharmonic functions along two curves*, Indag. Mathem., N.S., **4**, (1993), 447-459.
- [HH] R.R. HALL, W.K. HAYMAN, *Integrals of analytic functions along two curves*, Classical and Modern Potencial Theory and Applications, (1994), 253-265.
- [Hi] E. HILLE, *Analytic Function Theory*, Chelsea Publishing Co., **2**.
- [HW] W. HAYMAN, J.G. WU, *Level sets of univalent functions*, Comment. Math. Helv., **56**, (1981), 366-403.
- [JK] D.S. JERISON, C.E. KENIG, *Boundary behaviour of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*, Advances in Math., **46**, (1982), 80-147.
- [K] S.G. KRANTZ, *Complex Analysis: the Geometric Viewpoint*, Carus Mathematical Monographs, The Math. Assoc. of Amer., **23**.
- [M] D. MINDA, *Hyperbolic curvature on Riemannian surfaces*, Complex Variables The. Appl., **12**, (1989), 1-8.
- [O] B.G. OSGOOD, *Some properties of f''/f' and the Poincaré metric*, Indiana Univ. math. J., **31**, No.4, (1982), 449-461.
- [Ø1] K. ØYMA, *Harmonic measure and conformal length*, Proc. Amer. Math. Soc., **115**, (1992), 687-690.
- [Ø2] K. ØYMA, *The Hayman-Wu constant*, Amer. Math. Soc., (1993), 337-338.

- [P] C. POMMERENKE, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 299, Springer-Verlag, (1992).
- [R1] S. ROHDE, *Comunicación privada*.
- [R2] S. ROHDE, *Comunicación privada*.
- [Ra] T. RANSFORD, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Math. Soc. Student Texts, 28, (1995).
- [Re] G.E.H REUTER, *An inequality for integrals of subharmonic functions over convex surfaces*, J. London Math. Soc., 23, (1948), 56-58.
- [Ru] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, (1987).
- [T] M. TSUJI, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Chelsea Publishing Company, (1975).
- [TV] S. TREIL, A. VOLBERG, *A simple proof of the Hunt-Muckenhoupt-Wheeden Theorem*, Preprint.
- [V] S. VERBLUNSKY, *Inequalities for the integrals of positive harmonic functions along contours*, J. London Math. Soc., 24, (1949), 149-153.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día
de la fecha, para el fin de aprobar la presente Tesi
doctoral con APTO CUM LAUDE (UNÁNIME)

MADRID, 8 de Mayo de 1998

Sil Salda

Bujalance

M^{rs} Victoria Melián

[Signature]